Document d'aide à l'harmonisation de l'évaluation des compétences mathématiques

DES INDICATEURS POUR LE POSITIONNEMENT
DES EXEMPLES DE MISE EN PRATIQUE

Voie générale et tronc commun de la voie technologique

Académie de Grenoble
Inspection pédagogique régionale de mathématiques

Sommaire

Avant-propos et remerciements

Le présent document a été en grande partie élaboré à partir de différentes ressources publiées sur Eduscol. Les IA-IPR de mathématiques de l'académie de Grenoble remercient tout particulièrement les formateurs académiques qui ont participé à la conception de ce fascicule pour la qualité de leurs contributions.

1 Présentation du document

1.1 Objectif

Le présent document vise à mettre à disposition un nombre suffisant d'éléments pour pouvoir procéder à une évaluation des élèves transparente et sereine :

- Tout au long des apprentissages ;
- Au moment de renseigner les livrets scolaires.

Il propose des indications permettant de positionner l'élève sur les différents niveaux de maîtrise pour chacune des compétences indiquées dans le livret scolaire du cycle terminal. Des liens hypertextes permettent d'accéder à des exemples d'utilisation de ces indications, sous la forme d'un problème.

Il est possible que, selon le problème ou la situation d'évaluation, seuls les trois premiers niveaux d'une compétence puissent être évalués. On peut alors décider soit de ne pas évaluer cette compétence à travers la situation (on cible alors explicitement d'autres compétences) soit de considérer qu'un élève en réussite aura atteint au moins le niveau maîtrisé. Il faudra alors l'évaluer sur cette compétence dans d'autres situations pour voir s'il atteint le niveau supérieur.

1.2 Droit à l'erreur

Le niveau de maitrise des compétences par les élèves peut être évalué au moment des évaluations (formatives et sommatives). Pour le niveau de maîtrise reporté en fin d'année dans le livret scolaire, une contre-performance ponctuelle pourra être effacée par d'autres réussites sur la même compétence.

2 Indications pour le positionnement de l'élève sur chacune des compétences

2.1 Mener une recherche de façon autonome

Bien maîtrisée	L'élève sait extraire les informations utiles et s'engage de lui-même dans une démarche pour résoudre un problème à prise d'initiative, parfois même dans un contexte non familier.
Maîtrisée	L'élève sait extraire les informations utiles et s'engage de lui-même dans une démarche pour résoudre un problème à prise d'initiative dans un contexte familier.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève sait extraire les informations utiles (même partiellement) et, si on lui apporte une aide adaptée, s'engage dans une démarche pour résoudre un problème à prise d'initiative dans un contexte familier.
Non maîtrisée	L'élève éprouve des difficultés à extraire les informations utiles OU ne s'engage pas dans une démarche pour résoudre un problème (recherche d'exemples, de contre-exemples, conjectures, décomposition en sous-problèmes, expérimentation…), même si on lui apporte une aide adaptée.

☞ Renvoi vers un exemple de mise en œuvre

2.2 Modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle

→ Traduire en langage mathématique une situation réelle :

Bien maîtrisée	L'élève sait utiliser un modèle mathématique donné pour traduire une situation réelle. Il est capable de proposer lui-même un modèle adapté. Il est capable d'élaborer une simulation. Il est capable de valider ou d'invalider un modèle donné ou d'en percevoir les limites.
Maîtrisée	L'élève sait utiliser un modèle mathématique donné pour traduire une situation réelle simple. Il est capable de comprendre une simulation. Il est capable de proposer lui-même un modèle adapté sur certaines situations réelles simples. Il est capable de reconnaitre de quel modèle relève une situation pour s'y engager, sans nécessairement aller au bout de la résolution.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève sait utiliser un modèle mathématique donné traduisant une situation réelle simple, mais éprouve des difficultés à proposer de lui-même un modèle adapté. Il sait utiliser une simulation.
Non maîtrisée	L'élève ne fait pas de lien entre la réalité et sa représentation symbolique OU éprouve des difficultés à reconnaître un modèle mathématique pertinent.

☞ Renvoi vers un exemple de mise en œuvre

2.3 Représenter, choisir un cadre, changer de registre

Bien maîtrisée	L'élève sait exploiter un cadre adapté et passer d'un mode de représentation à un autre pour résoudre un problème dans un contexte non familier.
Maîtrisée	L'élève sait exploiter un cadre adapté et passer d'un mode de représentation à un autre pour résoudre un problème dans un contexte familier.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève sait choisir un cadre OU il est capable de passer d'un mode de représentation à un autre.
Non maîtrisée	L'élève ne sait pas quel cadre choisir pour résoudre un problème et éprouve des difficultés à passer d'un mode de représentation à un autre.

☞ Renvoi vers un exemple de mise en œuvre

2.4 Calculer, appliquer des techniques, mettre en œuvre des algorithmes

→ Exercer l'intelligence du calcul en disposant d'automatismes :

Bien maîtrisée	L'élève utilise les automatismes de calculs acquis pour mener à bien un calcul complexe (organisation des étapes de calcul, choix des transformations adaptées, simplification) y compris dans un contexte non familier. Il pense souvent à contrôler son résultat (ordre de grandeur, encadrement ou considérations de signes).
Maîtrisée	L'élève utilise les automatismes de calculs acquis pour mener à bien un calcul complexe (organisation des étapes de calcul, choix des transformations adaptées, simplification) dans un contexte usuel. Il pense parfois à contrôler son résultat (ordre de grandeur, encadrement ou considérations de signes).
Insuffisamment maîtrisée	L'élève sait mener à bien un calcul simple et quelques automatismes de calculs sont maîtrisés. Il sait parfois organiser les étapes d'un calcul complexe, mais éprouve des difficultés à le mener à bien, même dans un contexte usuel.
Non maîtrisée	L'élève éprouve des difficultés à mener à bien un calcul simple (priorités opératoires, calcul fractionnaire, calcul littéral). Il n'a pas acquis d'automatismes de calculs.

☞ *Renvoi vers un exemple de mise en œuvre*

→ Mettre en œuvre des algorithmes simples :

Bien maîtrisée	L'élève comprend le fonctionnement d'un programme plus complexe et est capable de produire un algorithme pour répondre à un problème, parfois même dans un contexte non familier.
Maîtrisée	L'élève comprend le fonctionnement d'un programme simple (notion de variable, instruction et boucle conditionnelle, boucle itérative, notion de fonction, notion de liste) et sait interpréter le résultat produit. Il parvient à compléter un algorithme simple ou à le modifier pour répondre à un problème usuel donné. Il parvient parfois à produire un algorithme répondant au problème.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève maîtrise la plupart des notions suivantes : variable, instruction et boucle conditionnelle, boucle itérative, fonction, liste. Il sait interpréter le résultat produit. Il parvient partiellement à compléter un algorithme simple ou à le modifier pour répondre à un problème usuel donné. Il ne parvient pas à produire lui-même un algorithme répondant au problème.
Non maîtrisée	L'élève éprouve des difficultés à comprendre le fonctionnement d'un algorithme simple.

☞ *Renvoi vers un exemple de mise en œuvre*

2.5 Raisonner, argumenter en exerçant un regard critique, démontrer

→ Conduire une démonstration :

Bien maîtrisée	L'élève est capable d'argumenter et d'utiliser des notions de logique (conditions nécessaires et suffisantes, équivalences, connecteurs…) pour bâtir des raisonnements de différents types et contenant plusieurs étapes.
Maîtrisée	L'élève est capable d'argumenter et d'utiliser des notions de logique (conditions nécessaires et suffisantes, équivalences, connecteurs…) pour bâtir un raisonnement contenant un nombre limité d'étapes.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève sait distinguer une conjecture et une propriété admise ou démontrée. Il est capable d'argumenter notamment pour infirmer ou confirmer une conjecture, mais éprouve des difficultés à bâtir un raisonnement.
Non maîtrisée	L'élève ne distingue pas ou peu une conjecture d'une propriété admise ou démontrée. Il éprouve des difficultés à justifier ses résultats.

☞ Renvoi vers un exemple de mise en œuvre

→ Utiliser différents types de raisonnement :

Bien maîtrisée	L'élève connaît plusieurs types de raisonnements (par exemple : analyse-synthèse, équivalence, disjonction des cas, absurde, contraposée, récurrence) et sait les mettre en œuvre y compris dans un contexte différent de ce qui a été vu en classe. Il donne un contre-exemple pour prouver qu'une généralité est fausse, parfois même dans un contexte non familier.
Maîtrisée	L'élève connaît plusieurs types de raisonnements (par exemple : analyse-synthèse, équivalence, disjonction des cas, absurde, contraposée, récurrence) et sait les mettre en œuvre dans des démonstrations simples similaires à celles qui ont été étudiées. Dans des cas simples, il donne un contre-exemple pour prouver qu'une généralité est fausse.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève connaît l'architecture de plusieurs types de raisonnements (par exemple : analyse-synthèse, équivalence, disjonction des cas, absurde, contraposée, récurrence) mais il peine à les mettre en œuvre dans les démonstrations qui lui sont proposées. Il pense à chercher un contre-exemple pour prouver qu'une généralité est fausse.
Non maîtrisée	L'élève connaît mal les différents types de raisonnement OU ne parvient pas du tout à les mettre en œuvre dans les démonstrations qui lui sont proposées. Il n'a pas l'idée de donner un contre-exemple pour prouver qu'une généralité est fausse.

☞ Renvoi vers un exemple de mise en œuvre

2.6 Communiquer à l'écrit, à l'oral

Dans le tronc commun de la voie technologique, les compétences « communiquer à l'écrit […] » et « communiquer à l'oral […]» sont regroupées en une seule compétence « communiquer à l'écrit et à l'oral […]».

→ Communiquer à l'écrit en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents :

Bien maîtrisée	L'élève est généralement capable de structurer une argumentation écrite en utilisant un vocabulaire et des symboles mathématiques rigoureux.
Maîtrisée	L'élève est généralement capable de justifier des réponses simples en utilisant un vocabulaire et des symboles mathématiques adaptés, même s'il manque parfois de rigueur.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève essaie de justifier ses réponses mais l'argumentation est peu convaincante OU le vocabulaire ou les symboles mathématiques utilisés sont peu rigoureux.
Non maîtrisée	L'élève se contente généralement de réponses non justifiées. Le vocabulaire ou les symboles mathématiques utilisés sont peu rigoureux.

☞ Renvoi vers un exemple de mise en œuvre

→ Communiquer à l'oral en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents :

Bien maîtrisée	L'élève est capable de structurer une argumentation orale en utilisant un vocabulaire mathématique rigoureux.
Maîtrisée	L'élève est capable d'argumenter oralement et le vocabulaire mathématique utilisé est adapté, même s'il manque parfois de précision. Dans les échanges, la prise en compte des autres est limitée.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève est capable d'argumenter oralement, mais le vocabulaire mathématique utilisé est peu rigoureux.
Non maîtrisée	L'élève s'exprime peu et son propos est souvent confus ou désorganisé. Le vocabulaire mathématique est peu rigoureux.

☞ Renvoi vers un exemple de mise en œuvre

3 Exemples de mise en pratique

3.1 Mener une recherche de façon autonome

Retour vers la compétence

Point d'éclairage pour évaluer cette compétence

La notion d'exercice « familier » ou « non familier » dépend de ce que chaque enseignant aura fait avec sa classe. C'est à chacun de juger dans quelle catégorie il situe un exercice en fonction du contenu et du moment où celui-ci est donné.

L'ensemble des évaluations peut aussi permettre de distinguer les niveaux de maîtrise « Maîtrisée » et « Bien maîtrisée » dans l'évaluation finale des livrets scolaires.

Énoncé

Grégoire, 10 ans, veut délimiter dans son jardin un enclos rectangulaire pour son lapin nain. Son père lui donne 18 m de grillage.

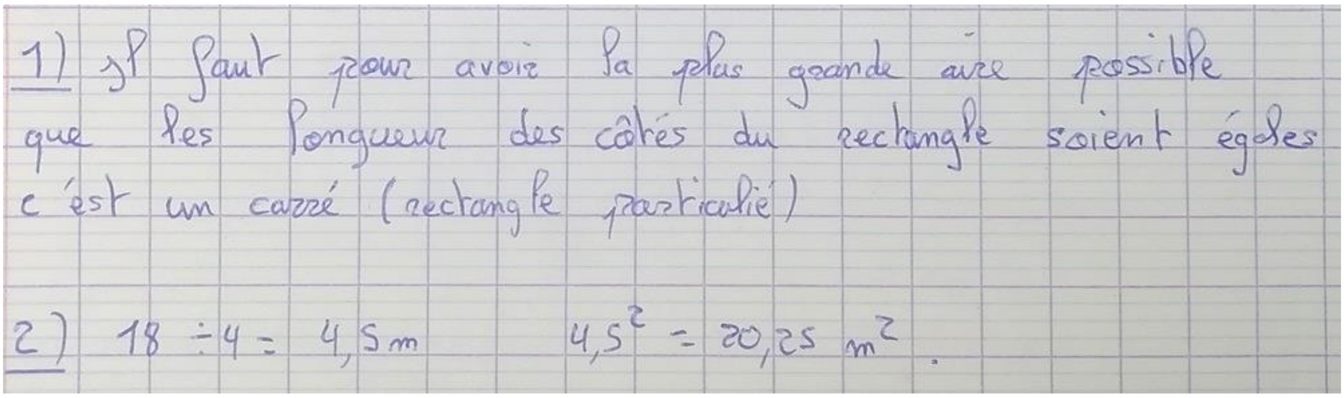
Déterminer les dimensions de cet enclos rectangulaire qui donnent une aire maximale. Quelle est alors la valeur de cette aire ?

Grille de positionnement

Bien maîtrisée	Dans un contexte non familier, l'élève émet une conjecture et effectue des tentatives pour contrôler la validité de la réponse obtenue.
Maîtrisée	Dans un contexte familier, l'élève émet une conjecture et effectue des tentatives pour contrôler la validité de la réponse obtenue.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève effectue quelques essais qui montrent qu'il sait exploiter les données utiles de l'énoncé OU émet une conjecture (stratégie par essais/erreurs, graphique, tableau de valeurs, logiciel de géométrie), éventuellement suite à une aide adaptée.
Non maîtrisée	L'élève effectue quelques essais, mais ne parvient pas à exploiter les données (18m, rectangle, aire), même avec une aide adaptée.

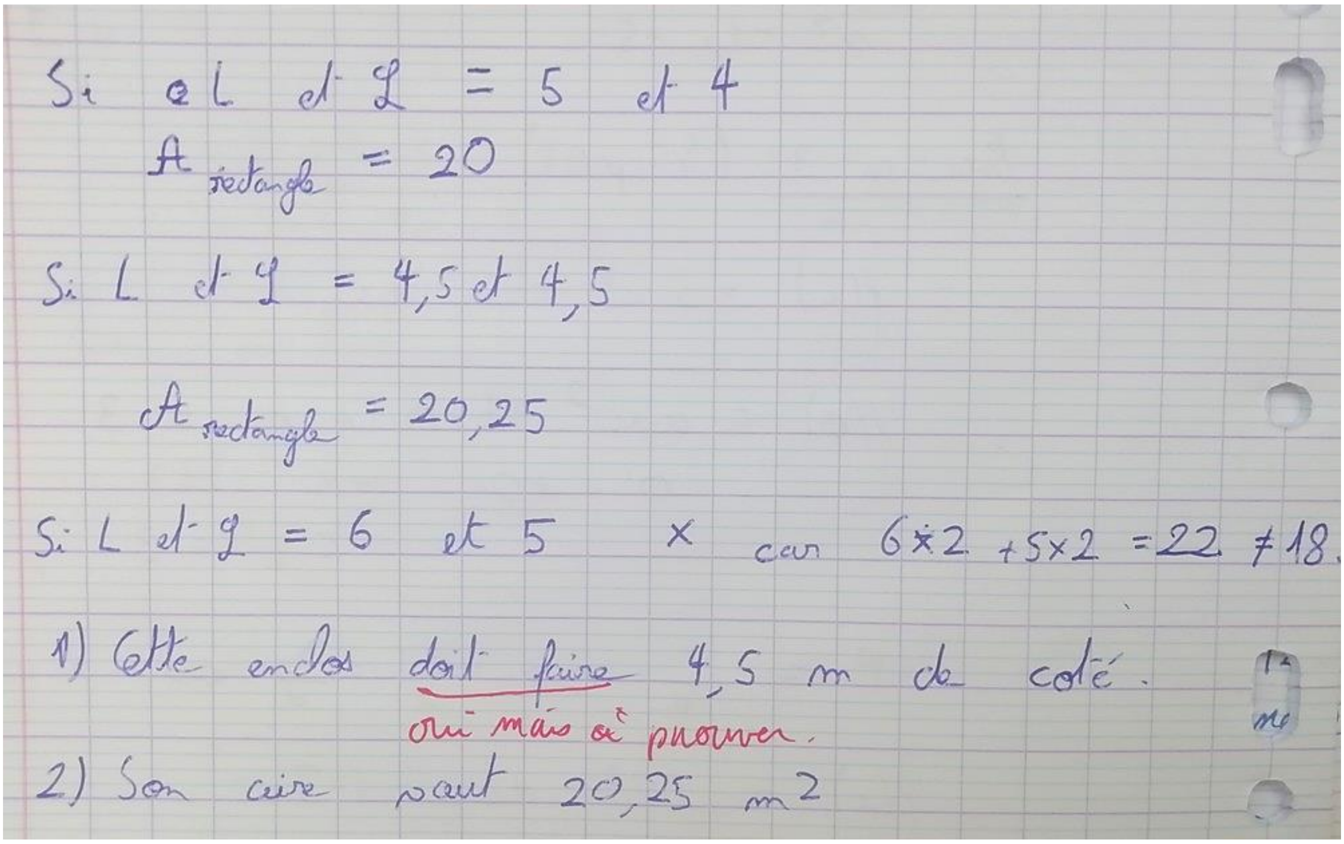
Copies d'élèves

→ **Copie n° 1** : Evaluée à « **Insuffisamment maîtrisée** ».


1) il faut pour avoir la plus grande aire possible que les longueur des côtés du rectangle soient égales c'est un carré (rectangle particulié)

2) 18 ÷ 4 = 4,5 m   4,5² = 20,25 m².

→ **Copie n° 2** : Evaluée à « **Insuffisamment maîtrisée** ».



Si l et L = 5 et 4

$A_{rectangle} = 20$

Si L et l = 4,5 et 4,5

$A_{rectangle} = 20,25$

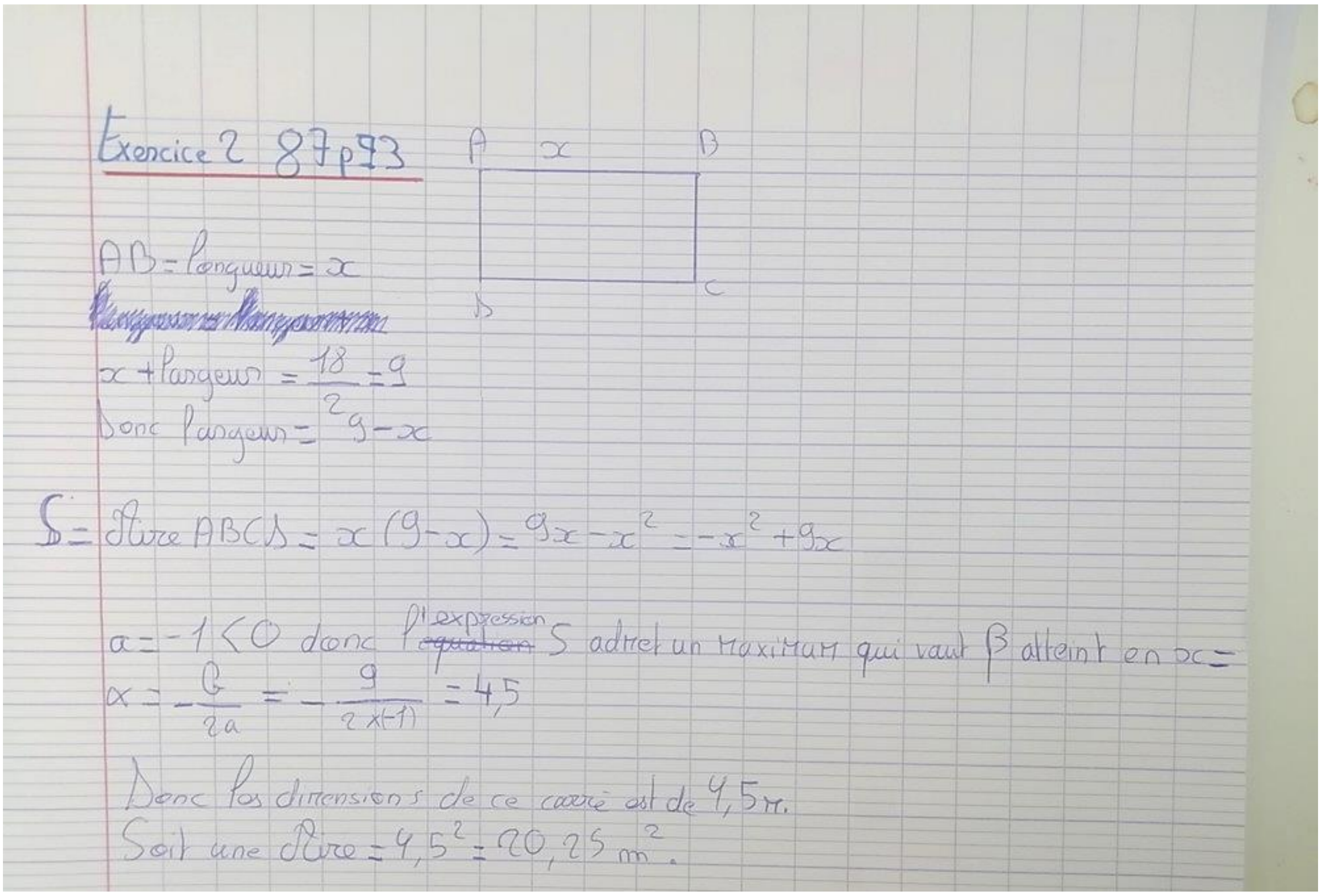
Si L et l = 6 et 5 × car $6 \times 2 + 5 \times 2 = 22 \neq 18$.

1) Cette enclos doit faire 4,5 m de côté.

oui mais à prouver.

2) Son aire vaut 20,25 m2

→ **Copie n° 3** : Evaluée à « **Maîtrisée** » si le problème est familier ou « **Bien maîtrisée** » s'il n'est pas familier.



Exercice 2 87p93

AB = longueur = x

x + largeur = $\frac{18}{2} = 9$

Donc largeur = $9 - x$

S = Aire ABCD = $x(9-x) = 9x - x^2 = -x^2 + 9x$

$a = -1 < 0$ donc l'expression ~~l'équation~~ S admet un maximum qui vaut β atteint en $x =$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2 \times (-1)} = 4,5$

Donc les dimensions de ce carré est de 4,5 m.

Soit une aire = $4,5^2 = 20,25$ m².

3.2 Modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle

Retour vers la compétence

Énoncé

Problème à prise d'initiative : le globe-trotter

Un globe-trotter a parié qu'il pouvait parcourir 6 000 km à pied en courant un peu tous les jours (sans jamais s'arrêter une journée entière). Au meilleur de sa forme le premier jour, il parcourt 50 km. La fatigue s'accumulant, la distance parcourue diminue de 1% chaque jour.

Le globe-trotter peut-il gagner son pari ? Justifier.

Une démarche possible

On peut modéliser cette situation par une suite géométrique (u_n) donnant la distance parcourue en km le n-ième jour. On a $u_1 = 50$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n = 50 \times 0{,}99^{n-1}$.

La distance totale parcourue au bout de n jours est :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= 50 + 50 \times 0{,}99 + \cdots + 50 \times 0{,}99^{n-1} \\ &= 50 \times (1 + 0{,}99 + \cdots + 0{,}99^{n-1}) \\ &= 50 \times \frac{1-0{,}99^n}{1-0{,}99} \\ &= 5\,000 \times (1 - 0{,}99^n) \end{aligned}$$

$1 - 0{,}99^n < 1$ donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_n < 6\,000$.

La distance totale parcourue en n jours sera toujours strictement inférieure à 6 000 km, donc le globe-trotter ne peut pas gagner son pari dans ces conditions.

Remarque : validité du modèle

Il peut être intéressant de discuter le domaine de validité du modèle avec les élèves. Comme la suite (u_n) a pour limite 0, ses termes sont, à partir d'un certain rang, inférieurs à 0,001. Ainsi, à partir d'un certain jour, le globe-trotter court moins d'un millimètre en une journée. Une telle situation est bien évidemment absurde et souligne le fait que le modèle choisi n'est pas valable sur une longue durée. Une discussion en classe peut ainsi porter sur la limite de validité de ce modèle.

La grille de positionnement

Traduire en langage mathématique une situation réelle :

→ **Non maîtrisée**

L'élève ne sait pas comment calculer la distance parcourue le n-ième jour.

OU ne fait pas la différence entre la distance parcourue le n-ième jour et la distance totale parcourue

OU ne parvient pas à mettre en place une démarche permettant de calculer la somme des distances parcourues.

→ **Insuffisamment maîtrisée**

L'élève reconnait que la situation peut se modéliser par une suite (il exprime correctement la distance parcourue le n-ième jour) mais ne parvient pas à traduire la question par une inéquation.

OU modélise à l'aide d'un algorithme ou d'un tableur les distances parcourues, mais ne parvient pas à traduire la question par une inéquation.

OU il met en œuvre un algorithme adapté à la situation comportant une ou plusieurs erreurs telles qu'une boucle « tant que » qui n'a pas de « point d'arrêt » par exemple, ce qui l'empêche de conclure correctement :

```
N=1
U=50
S=50
while S<6000:
    N=N+1
    U=U*0.99
    S=S+U
    print(N,S)
```

OU, dans le cas où le professeur a fourni un coup de pouce pour la modélisation à l'aide d'une suite, l'élève sait l'utiliser dans sa démarche (idée de la somme et traduction du problème par une inéquation).

→ **Maîtrisée**

L'élève parvient à modéliser la situation par une suite et comprend qu'il faut calculer une somme, mais ne met pas en place une démarche lui permettant de conclure sur la réussite ou non du pari.

OU il parvient à modéliser la situation par une suite et résout une inéquation pour répondre à la question, sans comprendre qu'il faut calculer une somme.

OU il utilise dans sa démarche un ou des algorithmes bien construits, même s'il y a une petite erreur, ce qui lui permet de conclure (en cohérence avec les résultats obtenus).

→ **Bien maîtrisée**

L'élève parvient à modéliser la situation par une suite, comprend qu'il faut calculer une somme et met en place une démarche lui permettant de conclure sur la réussite ou non du pari.

OU il utilise dans sa démarche un ou des algorithmes bien construits, comprend que les 6 000 km ne peuvent pas être atteints et sait le prouver (de manière algébrique en utilisant la fonction ln ou en calculant la somme).

Remarque : On ne tient pas compte ici de l'exactitude des calculs (évalués dans la compétence « Calculer »), mais de la pertinence du modèle utilisé.

3.3 Représenter, choisir un cadre, changer de registre

Retour vers la compétence

Point d'éclairage pour évaluer cette compétence

La notion d'exercice « familier » ou « non familier » dépend de ce que chaque enseignant aura fait avec sa classe. C'est à chacun de juger dans quelle catégorie il situe un exercice en fonction du moment où celui-ci est donné.

L'ensemble des évaluations peut aussi permettre de distinguer les niveaux de maîtrise « Maîtrisée » et « Bien maîtrisée » dans l'évaluation finale des livrets scolaires.

Exemple 1 (première)

Énoncé

> Grégoire, 10 ans, veut délimiter dans son jardin un enclos rectangulaire pour son lapin nain. Son père lui donne 18 m de grillage.
> Déterminer les dimensions de cet enclos rectangulaire qui donnent une aire maximale. Quelle est alors la valeur de cette aire ?

Grille de positionnement

Bien maîtrisée	L'élève a su exploiter le cadre algébrique (si on considère la situation comme non familière pour l'élève)
Maîtrisée	L'élève a su exploiter le cadre algébrique (si on considère la situation comme familière pour l'élève)
Insuffisamment maîtrisée	L'élève a choisi un cadre mais qui ne permet pas d'aboutir (simulation sur GeoGebra, cadre géométrique, cadre numérique par essais/erreurs)
Non maîtrisée	L'élève n'a choisi aucun cadre.

Remarques

Les compétences « Modéliser » et « Représenter » sont très liées :

- Les élèves qui pensent à utiliser le cadre algébrique font généralement une modélisation.
- Les élèves qui ne parviennent pas à choisir un cadre ne font pas de modélisation.

Cependant, certains élèves choisissent un cadre numérique (essais/erreurs) ou géométrique mais ne modélisent pas.

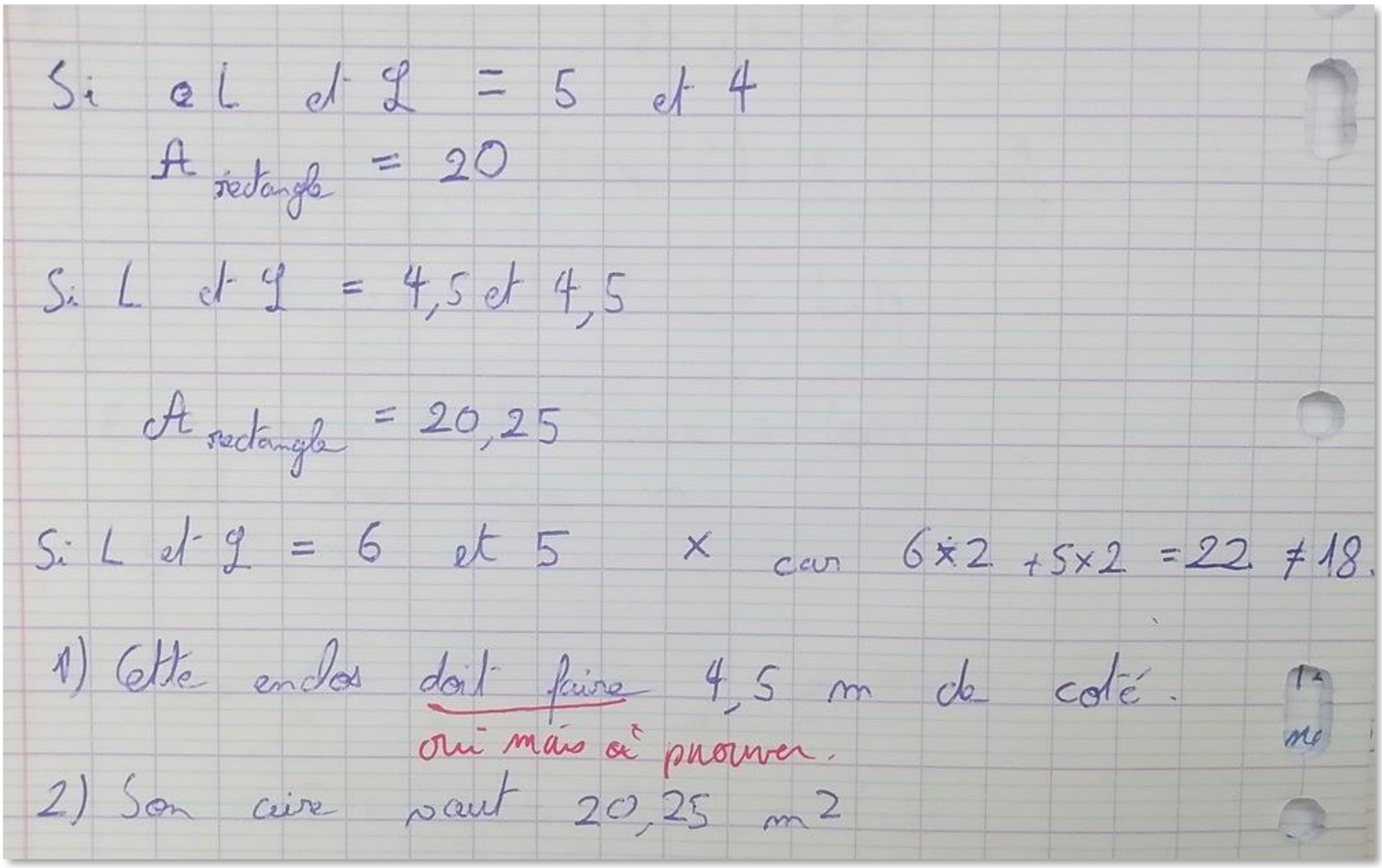
Copies d'élèves (exemple 1)

→ **Copie n° 1** : Evaluée à « **Non maîtrisée** »

1) il faut pour avoir la plus grande aire possible que les longueur des côtés du rectangle soient égales c'est un carré (rectangle particulié)

2) 18 ÷ 4 = 4,5 m   4,5² = 20,25 m².

→ **Copie n° 2** : Evaluée à « **Insuffisamment maîtrisée** ».



Si L et l = 5 et 4

$A_{rectangle} = 20$

Si L et l = 4,5 et 4,5

$A_{rectangle} = 20,25$

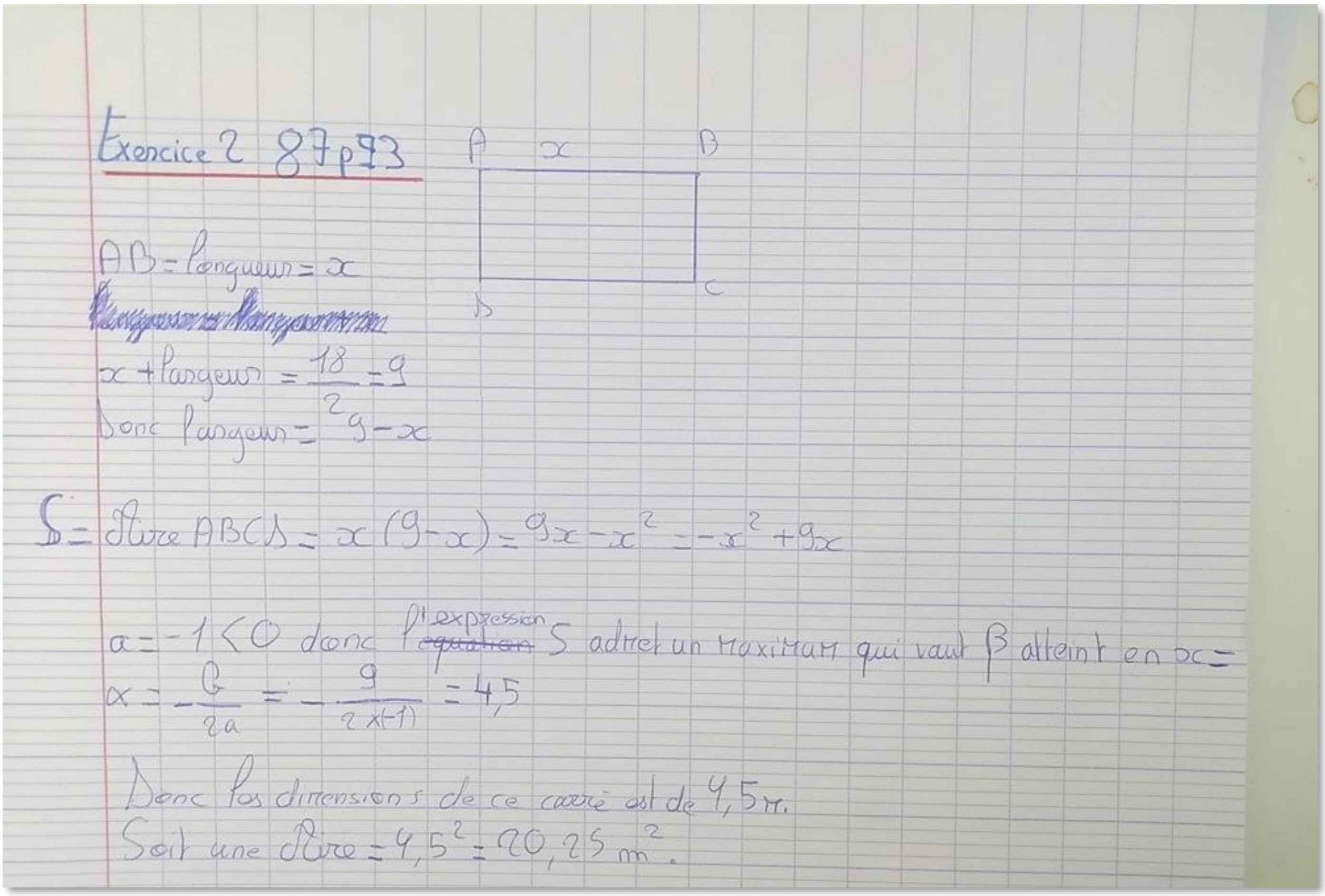
Si L et l = 6 et 5 × car $6 \times 2 + 5 \times 2 = 22 \neq 18$.

1) Cette enclos doit faire 4,5 m de coté.

oui mais à prouver.

2) Son aire vaut 20,25 m2

→ **Copie n° 3** : Evaluée à « **Maîtrisée** » si le problème est familier ou « **Bien maîtrisée** » s'il n'est pas familier.



Exercice 2 87p93

AB = longueur = x

x + largeur = $\frac{18}{2} = 9$

Donc largeur = $9 - x$

S = Aire ABCD = $x(9-x) = 9x - x^2 = -x^2 + 9x$

$a = -1 < 0$ donc l'expression ~~équation~~ S admet un maximum qui vaut β atteint en $x =$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2 \times (-1)} = 4,5$

Donc les dimensions de ce carré est de 4,5 m.

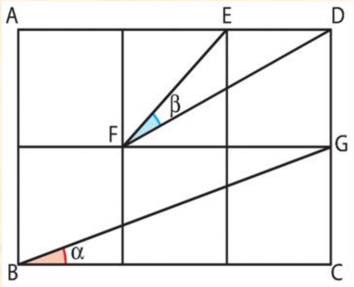
Soit une aire $= 4,5^2 = 20,25$ m².

Exemple 2 (Première)

Énoncé

On dispose de six carrés identiques de côté 1 comme sur la figure.

Lequel des deux angles α ou β est le plus grand ?



Grille de positionnement

Bien maîtrisée	L'élève a choisi un cadre lui permettant de conclure de manière rigoureuse (les angles sont de même mesure). La démarche utilisée fait appel à des notions qui ne sont pas travaillées dans la séquence en cours.
Maîtrisée	L'élève a choisi un cadre mais celui-ci permet seulement d'obtenir des valeurs approchées des deux angles.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève a choisi un cadre mais celui-ci ne lui permet pas de conclure.
Non maîtrisée	L'élève n'a pas choisi de cadre.

3.4 Calculer : Exercer l'intelligence du calcul en disposant d'automatismes

Retour vers la compétence

Exemple

Énoncé

Une commune dispose de 380 vélos qu'elle loue chaque mois. Le nombre de vélos loués le n-ième mois après le mois de janvier 2019 est modélisé par la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$$

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$u_n > 380$$

Grille de positionnement

→ **Non maîtrisée**

L'élève éprouve des difficultés à mener à bien un calcul simple (**priorités opératoires**, calcul fractionnaire, calcul littéral). Il n'a pas acquis d'automatismes de calculs.

$$\begin{aligned} u_n &> 380 \\ -140 \times 0{,}9^n + 420 &> 380 \\ 0{,}9^n + 420 &> \frac{380}{\mathbf{-140}} \end{aligned}$$

→ **Insuffisamment maîtrisée**

L'élève sait mener à bien un calcul simple et quelques automatismes de calculs sont maîtrisés. **Il sait parfois organiser les étapes d'un calcul complexe**, mais **éprouve des difficultés à le mener à bien**, même dans un contexte usuel.

$$\begin{array}{rcl} u_n & > & 380 \\ -140 \times 0{,}9^n + 420 & > & 380 \\ -140 \times 0{,}9^n & > & -40 \\ 0{,}9^n & < & \dfrac{-40}{-140} \quad \text{car} -140 < 0 \\ \mathbf{\ln(0,9^n)} & < & \mathbf{\dfrac{2}{7}} \\ ? & ? & ? \end{array}$$

→ **Maîtrisée**

L'élève utilise les automatismes de calculs acquis pour mener à bien un calcul complexe (organisation des étapes de calcul, choix des transformations adaptées, simplification) dans un contexte usuel. Il pense parfois à contrôler son résultat (ordre de grandeur, encadrement ou **considérations de signes**).

$$\begin{array}{rcl} u_n & > & 380 \\ -140 \times 0{,}9^n + 420 & > & 380 \\ -140 \times 0{,}9^n & > & -40 \\ 0{,}9^n & \boxed{<} & \dfrac{-40}{-140} \qquad \mathbf{car -140 < 0} \\ \ln(0{,}9^n) & < & \ln\left(\dfrac{2}{7}\right) \\ n\ln(0{,}9) & < & \ln\left(\dfrac{2}{7}\right) \quad \text{car} \boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)} \\ n & \boxed{<} & \underbrace{\dfrac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\mathbf{\ln(0,9)}}}_{\approx 11{,}9} \\ n & \leq & \boxed{11} \end{array}$$

→ **Bien maîtrisée**

L'élève utilise les automatismes de calculs acquis pour mener à bien un calcul complexe (organisation des étapes de calcul, choix des transformations adaptées, simplification) y compris dans un contexte non familier. Il pense souvent à contrôler son résultat (ordre de grandeur, encadrement ou **considérations de signes**).

$$\begin{array}{rcl} u_n & > & 380 \\ -140 \times 0{,}9^n + 420 & > & 380 \\ -140 \times 0{,}9^n & > & -40 \\ 0{,}9^n & < & \dfrac{-40}{-140} \qquad \text{car} -140 < 0 \\ \ln(0{,}9^n) & < & \ln\left(\dfrac{2}{7}\right) \\ n\ln(0{,}9) & < & \ln\left(\dfrac{2}{7}\right) \quad \text{car} \boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)} \\ n & > & \underbrace{\dfrac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\mathbf{\ln(0,9)}}}_{\approx 11{,}9} \qquad \text{car } \mathbf{\ln(0,9) < 0} \\ n & \geq & \boxed{12} \end{array}$$

3.5 Calculer : Mettre en œuvre des algorithmes

Retour vers la compétence

L'énoncé

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017.

Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve est inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n).

Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, $u_n$désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017 + n.

On a donc $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95(u_n + 80)$, soit : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

Dans ce même contexte, différentes questions peuvent être posées :

Question 1

Voici une fonction écrite en langage Python :

```
def cetaces(n):
    u = 3000
    for i in range (1,n+1):
        u = 0.95 * u + 76
    return u
```

ou

```
def cetaces(n):
    u = 3000
    i = 0
    while i < n :
        i = i + 1
        u = 0.95 * u + 76
    return u
```

Donner une interprétation de ce que renvoie l'appel cetaces(4).

Question 2

Pour cette question, on suppose qu'il a été établi que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$$

Compléter la fonction ci-dessous, écrite en langage Python, afin que, pour une année donnée, elle détermine si la zone bénéficie ou non du classement en réserve marine.

```
def classement(n):

    u = _ _ _ _ _ _

    if _ _ _ _ _  :

        return _ _ _

    else :

        return _ _ _
```

Question 3

Pour cette question, on suppose qu'on ne dispose pas (ou pas encore) d'une expression de u_n en fonction de n.

Le directeur veut utiliser une fonction, écrite en langage Python, pour étudier l'évolution du nombre de cétacés présents dans la réserve.

a. Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie le nombre de cétacés présents dans la réserve en $2017 + n$:

```
def cetaces(n):
    u = 3000
    i = 0
    while i _ _ _ _ :

        i = _ _ _ _

        u = _ _ _ _ _

    return _ _ _
```

ou

```
def cetaces(n):
    u = _ _ _ _

    for i in range _ _ _ _ :

        u = _ _ _ _ _ _

    return _ _ _
```

b. Le directeur estime que le taux de diminution de l'effectif pourrait être différent de 5%. Modifier la fonction précédente, pour que, quel que soit le nombre p entre 0 et 100, la fonction cetaces permette de renvoyer le nombre de cétacés présents dans la réserve en 2017+n pour un taux de diminution de p %.

Question 4

Pour cette question, on suppose qu'il a été prouvé que la suite (u_n) est décroissante et que sa limite est égale à 1520.

Compléter la fonction ci-contre, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie la première année lors de laquelle le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit.

```
def fermeture():

    n = _ _ _ _

    u = 3000

    while _ _ _ _   :

        n = _ _ _ _ _

        u = _ _ _ _ _

    return _ _ _
```

Question 5

Pour cette question, on suppose qu'il a été prouvé que la suite (u_n) est décroissante et que sa limite est égale à 1520.

Écrire une fonction algorithmique qui retourne la première année lors de laquelle le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit.

Question 6

Pour cette question, on suppose qu'on ne dispose que des informations données initialement dans le contexte.

Écrire un algorithme qui permette de répondre à la / aux question(s) suivante(s) :

- La réserve marine fermera-t-elle dans le siècle à venir ?
- Si oui, est-il possible qu'avec un plus grand nombre de cétacés qui arriveraient dans la réserve chaque année entre le 1er juin et le 31 octobre, la réserve ne ferme pas dans le siècle à venir ? (On supposera que ce nombre reste tout de même inférieur à 200).

La grille de positionnement

<u>Non maîtrisée</u>

→ L'élève éprouve des difficultés à comprendre le fonctionnement d'un algorithme simple.
- L'élève est en échec sur la question 1.
- Il ne connaît pas le langage algorithmique, ou ne sait pas faire fonctionner un algorithme simple.
- Les affectations ou les boucles ne sont pas comprises.

<u>Insuffisamment maîtrisée</u>

→ L'élève maîtrise la plupart des notions suivantes : variable, instruction et boucle conditionnelle, boucle itérative, fonction, liste. Il sait interpréter le résultat produit.
- *L'élève réussit la question 1.*
- *Il connaît le langage algorithmique, sait faire fonctionner un algorithme simple et fait le lien avec le contexte.*

→ Il parvient partiellement à compléter un algorithme simple ou à le modifier pour répondre à un problème usuel donné.
Il réussit aussi la question 2. : la notion d'affectation est acquise, il sait compléter une instruction conditionnelle simple. Il peut se tromper de cadre (écrire u_n à la place de u).

→ Il ne parvient pas à produire lui-même un algorithme répondant au problème.

Il est en difficulté sur les questions 3 et 4 :

- *dans la question 3 :*
  - *il réussit entièrement ou partiellement la question a. (il a compris les affectations, mais peut se tromper de cadre (écrire u_n à la place de u), peut se tromper sur la variable renvoyée par la fonction, commettre une petite erreur dans la condition (et la fonction ne renvoie pas le bon terme).*
  - *dans la question b., il n'a pas l'idée de créer une nouvelle variable correspondant au taux ou, s'il a cette idée, ne parvient pas à l'utiliser ensuite à bon escient.*

- *dans la question 4 : il peut se tromper dans la condition ($<$ au lieu de $>$), ou dans la variable renvoyée par la fonction (u au lieu de n ou $2017 + n$, selon l'initialisation choisie pour n)*

→ Il est en échec dans la question 5.

Maîtrisée

→ L'élève comprend le fonctionnement d'un programme simple (notion de variable, instruction et boucle conditionnelle, notion de fonction, notion de liste) et sait interpréter le résultat produit. Il parvient à compléter un algorithme simple ou à le modifier pour répondre à un problème usuel donné.
  - *L'élève réussit parfaitement les questions 1.et 2.*
  - *Il traite correctement les questions 3. et 4., à quelques petites erreurs près (par exemple notamment dans la syntaxe Python).*

→ Il ne parvient pas à produire un algorithme simple dans un problème usuel.
Il est en difficulté pour traiter la question 5., alors que c'est un algorithme de seuil classique.
Sans « modèle » sous les yeux, l'élève ne parvient pas à mettre en place un algorithme permettant de réaliser une tâche donnée dans le contexte, même classique.

Bien maîtrisée

→ L'élève comprend le fonctionnement d'un programme plus complexe et est capable de produire un algorithme pour répondre à un problème.
  - *L'élève réussit toutes les questions de 1. à 5.*
  - *Et, pourquoi pas, partiellement la question 6.*

3.6 Raisonner, argumenter, démontrer

Retour vers la compétence

Exemple 1 (Démontrer)

Énoncé

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère un polygone convexe possédant n côtés.
Une diagonale d'un tel polygone est un segment joignant deux sommets non consécutifs.
Démontrer que le nombre de diagonales d'un tel polygone est égal à :

$$\frac{n^2 - 3n}{2}$$

Grille de positionnement

Bien maîtrisée	L'élève mène un raisonnement juste, par exemple consistant à dénombrer l'ensemble des segments reliant deux points en l'identifiant aux couples de points, puis à soustraire le nombre de côtés du polygone.
Maîtrisée	L'élève mène un raisonnement partiellement juste, par exemple consistant à dénombrer l'ensemble des segments reliant deux points en l'identifiant aux couples de points, mais oublie de soustraire le nombre de côtés du polygone.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève teste l'expression pour plusieurs valeurs n et il est conscient de la nécessité de trouver une démarche de dénombrement général, sans parvenir à l'amorcer.
Non maîtrisée	L'élève se contente de tester l'expression pour plusieurs valeurs n et pense que des exemples suffisent à démontrer le résultat.

Exemple 2 (Utiliser différents types de raisonnement)

Énoncé

Démontrer que le nombre $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas rationnel.

Grille de positionnement

Bien maîtrisée	L'élève sait traiter l'exercice. Par ailleurs, même sans indication dans l'énoncé, il envisage de lui-même une démonstration par l'absurde.
Maîtrisée	Par analogie avec la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$, l'élève formule une bonne hypothèse dans le cadre d'un raisonnement par l'absurde et commence à l'exploiter. Même s'il ne réussit pas complètement, il est en mesure d'expliquer la fin du raisonnement.
Insuffisamment maîtrisée	L'élève amorce un raisonnement par l'absurde en formulant une bonne hypothèse, mais il ne parvient pas ensuite à l'exploiter.
Non maîtrisée	Même lorsque le type de raisonnement est indiqué clairement dans la consigne, l'élève ne parvient pas à le mener à bien.

3.7 Communiquer à l'écrit

Retour vers la compétence

Énoncé

Une commune dispose de 380 vélos qu'elle loue chaque mois. Le nombre de vélos loués le n-ième mois après le mois de janvier 2019 est modélisé par la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$$

À partir de quelle date le nombre de vélos loués sera-t-il strictement supérieur à 380 ?

Grille de positionnement

Positionnement	***Exemples de réponses d'élèves***
Non maîtrisée : L'élève se contente généralement de **réponses non justifiées**. Le vocabulaire ou les symboles mathématiques utilisés sont peu rigoureux.	D'après la calculatrice, on trouve $\boxed{12}$.
Insuffisamment maîtrisée : L'élève essaie de justifier ses réponses mais l'argumentation est peu convaincante ou le vocabulaire ou les symboles mathématiques utilisés sont **peu rigoureux.**	Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve $12 = 380{,}46$ donc à partir de $\boxed{12 \text{ mois}}$.
Maîtrisée : L'élève est généralement capable de justifier des réponses simples en utilisant un vocabulaire et des symboles mathématiques adaptés, **même s'il manque parfois de rigueur**.	$\begin{aligned} u_n &> 380 \\ -140 \times 0{,}9^n + 420 &> 380 \\ -140 \times 0{,}9^n &> -40 \\ 0{,}9^n &< \frac{-40}{-140} && \text{car } -140 < 0 \\ \ln(0{,}9^n) &< \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\ n\ln(0{,}9) &< \ln\left(\frac{2}{7}\right) && \text{car } \boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)} \\ n &\boxed{<} \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\mathbf{ln(0,9)}}}_{\approx 11{,}9} \\ n &\leq \boxed{11} \end{aligned}$ **Conclusion** : Le nombre de vélos loués sera strictement supérieur à 380 avant le $\boxed{11^{\text{ème}} \text{ mois}}$.
Bien maîtrisée : L'élève est généralement capable de structurer une argumentation écrite en utilisant un vocabulaire et des symboles mathématiques rigoureux.	$\begin{aligned} u_n &> 380 \\ -140 \times 0{,}9^n + 420 &> 380 \\ -140 \times 0{,}9^n &> -40 \\ 0{,}9^n &< \frac{-40}{-140} && \text{car } -140 < 0 \\ \ln(0{,}9^n) &< \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\ n\ln(0{,}9) &< \ln\left(\frac{2}{7}\right) && \text{car } \boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)} \\ n &> \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\mathbf{ln(0,9)}}}_{\approx 11{,}9} && \text{car } \mathbf{ln(0,9)} < 0 \\ n &\geq \boxed{12} \end{aligned}$ **Conclusion** : Le nombre de vélos loués sera strictement supérieur à 380 à partir du $12^{\text{ème}}$ mois après janvier 2019 soit à partir de $\boxed{\text{Janvier 2020}}$.

3.8 Communiquer à l'oral

Retour vers la compétence

Énoncé

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$.

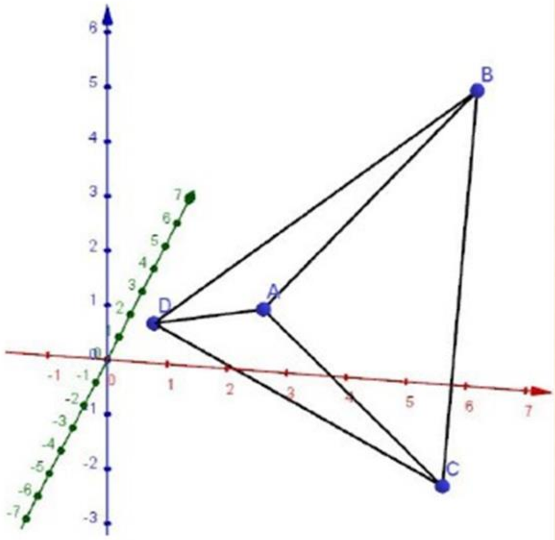
1. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

   où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   (a) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   (b) Calculer les longueurs DB et DC.
   (c) Montrer que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $45°$.
4. On admet que l'aire S du triangle BDC est

$$S = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin(45°)$$

   Calculer cette aire.
5. En déduire la distance du point A au plan (BDC).



Si vous avez terminé le devoir, vous pouvez démontrer le résultat admis : $S = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin(45°)$.

Grille de positionnement

On s'intéresse à la réponse à la question 5, dans le cadre d'une présentation d'un élève devant des camarades.

Bien maîtrisée	L'élève explique sa démarche en convainquant ses camarades qu'il suffit de calculer le volume du tétraèdre de deux manières. Il adopte un vocabulaire adapté pour désigner la longueur AH, où H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDC). De plus, il est capable de reformuler son propos pour s'adapter aux questions de ses camarades.
Maîtrisée	L'élève explique sa démarche en convainquant ses camarades qu'il suffit de calculer le volume du tétraèdre de deux manières. Il adopte un vocabulaire adapté pour désigner la longueur AH, où H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDC).
Insuffisamment maîtrisée	L'élève explique sa démarche en essayant de convaincre ses camarades qu'il suffit de calculer le volume du tétraèdre de deux manières. Mais il reste imprécis au moment de désigner la longueur AH, où H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDC).
Non maîtrisée	L'élève annonce son résultat mais se trouve démuni au moment d'expliquer sa démarche, ou dit simplement que $27 = \frac{1}{3} \times 9$.