Différencier une démonstration : un exemple d’activité possible

Spécialité de mathématiques, terminale générale

Académie de Grenoble
Inspection pédagogique régionale de mathématiques
classe de terminale voie générale

- Octobre 2020 -

Sommaire

Introduction

Dans le paragraphe consacré à son organisation, le programme de spécialité mathématiques de terminale indique :

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoir à la maison …

En complément des formations conduites au cours des journées de l'inspection, ce document propose une stratégie de différenciation pour accompagner les élèves à élaborer une démonstration, illustrée par l'exemple de la démonstration au programme de la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Pistes pour différencier

Objectifs de formation

- → Mobiliser la définition des coefficients binomiaux
- → Mettre en place et exploiter la bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0\,;1\}^n$
- → Utiliser les principes additifs et multiplicatifs

Prérequis

- Les notions de parties (ou de sous-ensembles), de n-listes ;
- Le symbole $\sum$;
- Principes additifs et multiplicatifs

Une démonstration possible

Soit n un entier et E un ensemble à n éléments et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
$Card(E) = n$. Il existe donc une bijection entre E et $[\![1;n]\!]$, ce qui permet de numéroter les éléments de E

$$E = \{e_1\,;\,e_2\,;\,\ldots.;\,e_n\}$$

En regroupant les parties de E de cardinal fixé, d'après la définition de $\binom{n}{k}$ on obtient que

$$Card\,(P(E)) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$$

A toute partie F de E, on associe le n-uplet (f_k) de $\{0\,;1\}^n$ défini de la façon suivante :

$$\forall\, k\ \in [\![1\,;n]\!],\ f_k = 1\ si\ e_k \in F\ et\ 0\ sinon$$

Autrement dit on décrit F en testant l'appartenance des éléments de E à F.
L'application ainsi définie est une bijection de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dans $\{0\,;1\}^{\mathrm{n}}$.

On a donc $Card\big(\mathcal{P}(E)\big) = Card\,(\{0\,;1\}^n)$
Or $Card\,(\{0\,;1\}^n) = 2^n$ d'après le « principe multiplicatif ».

Conclusion

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Remarques :

- *Une démonstration analogue peut être établie avec un alphabet à deux éléments*
- *Ils existent d'autres démonstrations ; le programme stipule de démontrer cette relation par dénombrement*

Les points clés de la démonstration

Deux parties peuvent être dégagées de l'étude de la démonstration :

→ Partie 1 : justifier que $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$ correspond au nombre total de partie
  → Point clé : le principe additif (les ensembles sont disjoints)
→ Partie 2 : dénombrement des parties d'un ensemble fini
  → Point clé 1 : changement de point de vue : correspondance entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0\,;1\}^n$
  → Point clé 2 : principe multiplicatif

Obstacles pour les élèves :

→ La notion de variable : n et k (qui est une variable muette)
→ Le changement de point de vue
→ La notion de n-liste
→ La notion de produit cartésien

Points de vigilance pour l'enseignant :

→ Abstraction accrue (les parties sont considérées comme des éléments)
→ Notion implicite de cardinal

Scénario de différenciation proposé : par « niveaux de détails »

Dans le document ressource « Raisonnement et démonstration »[1], plusieurs pistes sont proposées pour différencier le travail à conduire sur une démonstration :

- Par exploitation de plusieurs démonstrations (lorsque cela est possible), pour prendre en compte en particulier la diversité des fonctionnements intellectuels
- Par démonstration à plusieurs niveaux de détails
- En commençant par un exemple générique
- En proposant des approfondissements

Le scénario envisagé ici consiste à décliner la démonstration en plusieurs niveaux de détails :

→ **Niveau 1** : dégager des idées clés sur des exemples
→ **Niveau 2** : justification de points clés à l'aide d'exemples génériques
→ **Niveau 3** : preuve dans le cas général

[1] https://eduscol.education.fr/maths/actualites/actualites/article/raisonnement-et-demonstration.html

Proposition d'exercices

Exercice Niveau 1

Sans calculatrice.

Objectifs pour l'enseignant :

- *Faire manipuler*
- *Travailler autour du sens de $\binom{n}{k}$*

Enoncé :

On considère l'ensemble $E = \{e_1\,; e_2\,; e_3\}$.

1. Lister toutes les parties de E.

2. Combien vaut $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$?

3. La relation $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$ est-elle, dans ce cas, vérifiée ?

4. Reprendre l'exercice dans le cas d'un ensemble à 4 éléments.

Exercice niveau 2 (version 1)

Objectif : expliciter le changement de point de vue et de représentation

Enoncé

Partie 1

1. On considère un ensemble à trois éléments. $E = \{e_1\,; e_2\,; e_3\}$.

a. Interpréter $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ pour cet ensemble E.

b. A quoi correspond $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}$ pour cet ensemble E ?

2. Cas général : à quoi correspond $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour un ensemble à n éléments ?

Partie 2

On considère l'ensemble suivant à 3 éléments :

$$E = \{e_1\,; e_2\,; e_3\}$$

Soit F une partie de E. Pour la décrire, on utilise un triplet composé de 0 et de 1 que l'on complète de la façon suivante :

- si e_1 appartient à F, on indique 1 en première position du triplet ; sinon, on indique 0
- si e_2 appartient à F, on indique 1 en deuxième position du triplet ; sinon, on indique 0
- ainsi de suite …

1. A quel triplet correspond la partie $\{e_1\,; e_3\}$? A quelle partie de E correspond le triplet suivant : $(0\,; 1\,; 1)$?

2. Combien de triplets peut-on réaliser avec des 0 et des 1 ?

3. A quoi correspond ce nombre pour l'ensemble E ?

4. Conclure.

Exercice niveau 2 (version 2)

Partie 1

1. On considère un ensemble à trois éléments. $E = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$.

a. Interpréter $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ pour cet ensemble E.

b. A quoi correspond $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}$ pour cet ensemble E ?

2. Cas général : à quoi correspond $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour un ensemble à n éléments ?

Partie 2

1. On considère l'ensemble suivant à 3 éléments :

$$E = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$$

Soit F une partie de E. Pour la décrire, on utilise un triplet composé de 0 et de 1 que l'on complète de la façon suivante :

- si e_1 appartient à F, on indique 1 en première position du triplet ; sinon, on indique 0
- si e_2 appartient à F, on indique 1 en deuxième position du triplet ; sinon, on indique 0
- ainsi de suite …

a. A quel triplet correspond la partie $\{e_1 ; e_3\}$? A quelle partie de E correspond le triplet suivant : $(0 ; 1 ; 1)$?

b. Représenter l'ensemble des triplets à l'aide d'un arbre.

c. Interpréter le coefficient $\binom{3}{2}$ dans le cas de l'arbre ?

d. Interpréter, dans le cas de l'arbre, $\sum_{\mathrm{k}=0}^{3} \binom{3}{\mathrm{k}}$

e. Conclure dans le cas $n = 3$.

2. Qu'en est-il dans le cas $n = 4$?

3. Exprimer $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}$ en fonction de $\sum_{k=0}^{4} \binom{3}{k}$.

Exercice niveau 3

Partie 1

On considère un ensemble E à n éléments. <u>Pour cet ensemble E :</u>

1. Que représente $\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$?

2. A quoi correspond $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$?

Partie 2

- **Version 1 : reprise de l'exercice 2 par dénombrement des n-uplets dans le cas général**
- **Version 2 : reprise de l'exercice 2 par récurrence dans le cas général**

Quelques éléments de synthèse avec les élèves

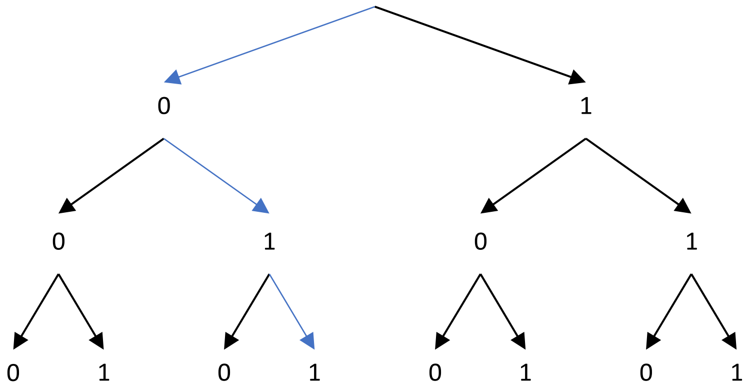
Explicitation du changement de point de vue et de représentation

Le processus qui consiste à observer une partie d'un ensemble selon la présence ou non de chaque élément de l'ensemble de départ, permet de mettre chaque partie en correspondance avec une et une seule n-liste de $\{0\,;1\}^n$.

<u>Exemple avec un ensemble à 3 éléments</u>

- La partie $\{e_2\,;e_3\}$ correspond à la liste $(0\,;1\,;1)$.

- Cet ensemble de listes peut être décrit à l'aide de l'arbre ci-dessous :



Le chemin en bleu sur l'arbre représente la liste $(0\,;1\,;1)$, c'est-à-dire La partie $\{e_2\,;e_3\}$.
Chaque liste correspond à un trajet complet de l'arbre.
Ainsi, le coefficient $\binom{3}{2}$ correspond au nombre de listes (ou de trajets de l'arbre) qui comportent exactement deux « 1 » ; il y en a 3.
$\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}$ correspond donc au nombre total de listes (ou de trajets dans l'arbre) ; dans l'exemple, il y en a 8, soit 2^3.

Cas Général selon les versions choisies d'exercices :

- L'arbre permet de visualiser que l'ajout d'un élément à l'ensemble de départ multiplie par deux le nombre total de parties, et donc d'établir une relation de récurrence. On en déduit que le nombre de parties d'un ensemble fini est une suite géométrique de raison 2 indexée sur le nombre d'éléments ; l'ensemble vide correspond au cas $n = 0$ et compte une partie (lui-même), d'où le résultat.
- La correspondance un à un entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0\,;1\}^n$ permet de conclure directement avec le principe multiplicatif : comme le produit cartésien $\{0\,;1\}^n$ comporte 2^n éléments, il en est de même de $\mathcal{P}(E)$.

En guise de conclusion : deux commentaires

- Les exercices proposés ne rendent pas explicite la stratégie de démonstration utilisée reposant sur la transitivité de la relation d'égalité ; il peut être intéressant de la révéler en synthèse ; c'est d'ailleurs une stratégie régulièrement utilisée (par exemple en calcul littéral …)
- Le changement de point de vue et de représentation permet de conduire à une nouvelle interprétation des coefficients binomiaux (le nombre de branche dans l'arbre qui correspondent à …, le nombre de listes qui contiennent …). Cette autre interprétation peut être exploitée dans des exercices du type planche de Galton, marche aléatoire …