Ce document a été élaboré par les formateurs du groupe académique lycée. Il est destiné aux enseignants et n'a pas vocation à être distribué en l'état aux élèves.

# Probabilités

## Enseignement de spécialité de terminale

# I. Autour des variables aléatoires

Dans toute la suite, on se place sur un univers Ω fini sur lequel on définit une probabilité P.

### 1. Linéarité de l'espérance

| Extrait du programme |
|---|
| **Contenus**<br>– Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$. |
| La démonstration de la linéarité de l'espérance nécessite de formaliser les variables aléatoires comme des fonctions sur l'univers et d'utiliser l'expression de l'espérance comme moyenne pondérée sur l'ensemble des issues. Le professeur peut choisir de l'admettre, ou de la justifier sur un exemple. |

**Définition** : Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires, définies sur $\Omega$ et $a$ un nombre réel. On note $X+Y$ d'une part, et $aX$ d'autre part, les variables aléatoires définies pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \qquad et \qquad (aX)(\omega) = aX(\omega)$$

**Propriété** : Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $\Omega$ et $a$ un nombre réel. On a :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad et \qquad E(aX) = aE(X)$$

**Rappels :** La formule de l'espérance utilisée en première est :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{r} x_k P(X = x_k) \text{ où les } x_k \text{ désignent les valeurs prises par } X$$

Pour la démonstration de $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, on a besoin d'une autre expression :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$$

Illustrons cela avec un jeu de dé, dans lequel on gagne 1 € si on obtient 1, 2 ou 3 ; on gagne 2 € si on obtient 4 ou 5 ; et on gagne 5 € si on obtient 6.

Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le gain correspondant.

La loi de probabilité de $X$ est :

| $x_i$ | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ | $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

On a ainsi : $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 2$

Avec la deuxième formule, le calcul se fait ainsi :
Il faut d'abord donner l'image de chaque issue par la fonction $X$ :

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X(\omega)$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 5 |
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

On alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = X(1)P(1) + X(2)P(2) + X(3)P(3) + X(4)P(4) + X(5)P(5) + X(6)P(6)$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6}$$

$$= 1\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + 5 \times \frac{1}{6}$$

$$= 2$$

**Démonstration de la linéarité**:

Espérance de la somme :

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega)P(\omega)$$

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} \big(X(\omega) + Y(\omega)\big)P(\omega)$$

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} \big(X(\omega)P(\omega) + Y(\omega)P(\omega)\big)$$

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Espérance de $aX$:

Si $a = 0$, on a $E(aX) = 0$ (car $aX$ ne prend que la valeur 0) et $aE(X) = 0$. Donc $E(aX) = aE(X)$.
Supposons maintenant que $a \neq 0$:

$$E(aX) = \sum_{k=1}^{r} ax_k P(aX = ax_k)$$

$$E(aX) = a \sum_{k=1}^{r} x_k P(X = x_k)$$

$$E(aX) = aE(X)$$

Les événements $\{aX = ax_k\}$ et $\{X = x_k\}$ sont identiques. En effet :

$$\{aX = ax_k\} = \{\omega \in \Omega \,, aX(\omega) = ax_k\}$$
$$= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\}$$
$$= \{X = x_k\}$$

## 2. La variance

| Extrait du programme |
|---|
| Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes *X*, *Y* et relation d'additivité *V* (*X* + *Y*) = *V*(*X*) + *V*(*Y*).<br>Relation *V* (*a X*) = *a* ² *V*(*X*). |
| L'additivité de la variance pour la somme de deux variables indépendantes est admise. |

**Propriété** : Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur $\Omega$. Pour tout réel $a$ :

$$V(aX) = a^2V(X)$$

**Démonstration** :

Par définition, $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$ , On a donc :

$$\begin{aligned} V(aX) &= E\left(\left(aX - E(aX)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(aX - aE(X)\right)^2\right) \\ &= E\left(a^2\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= a^2E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

**Propriété** : Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles **indépendantes** définies sur $\Omega$. On a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

**Propositions d'exemples simples permettant de conjecturer ces résultats :**

**Exemple 1 :**

On lance deux dés équilibrés, l'un à 4 faces et l'autre à 6 faces.
On note respectivement $X$ et $Y$ les résultats.

$X$ et $Y$ sont indépendantes.
Pour tout $k$ entre 1 et 4, $P(X = k) = \frac{1}{4}$ ; $E(X) = \frac{5}{2}$ et $V(X) = \frac{5}{4}$.
Pour tout $k$ entre 1 et 6, $P(Y = k) = \frac{1}{6}$ ; $E(Y) = \frac{7}{2}$ et $V(Y) = \frac{35}{12}$.
$X + Y$ peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 2 et 10. On pose $Z = X + Y$.
À l'aide d'un tableau à double entrée (va.xlsx) on obtient :

| $z_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z = z_i)$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{3}{24}$ | $\frac{4}{24}$ | $\frac{4}{24}$ | $\frac{4}{24}$ | $\frac{3}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |

$E(Z) = 2 \times \frac{1}{24} + 3 \times \frac{2}{24} + \cdots + 10 \times \frac{1}{24} = \frac{144}{24} = 6$ et $V(Z) = \frac{50}{12}$

On a bien $E(X) + E(Y) = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6 = E(X+Y)$ et $V(X) + V(Y) = \frac{5}{4} + \frac{35}{12} = \frac{50}{12} = V(X+Y)$

**Exemple 2 :** On lance deux dés. On note $X$ la somme des nombres obtenus et $Y$ leur différence (en valeur absolue). Dans cette situation, $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.
On pose $Z = X + Y$.
1. À l'aide de tableaux à double entrée on obtient les lois de probabilités (va.xlsx) :

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = k)$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |

| $k$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X + Y = k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

$E(X) = 7$ et $E(Y) = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$.

$E(Z) = 2 \times \frac{1}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \cdots + 12 \times \frac{11}{36} = \frac{322}{36} = \frac{161}{18}$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 7 + \frac{35}{18} = \frac{161}{18}$

*Ici la relation $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ est conjecturée avec des variables aléatoires quelconques qui ne sont pas indépendantes.*

**Remarque : L'additivité de la variance pour la somme de deux variables indépendantes peut donner lieu à un travail de logique**

Il y a, en effet, trois aspects à considérer que l'on peut éclairer au travers d'exemples :

- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- Si $X$ et $Y$ sont telles que $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$ alors elles sont non indépendantes.
- On peut trouver $X$ et $Y$ non indépendantes telles que $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

**Exemples** :

1. **Application de la propriété** : On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches et deux boules noires.
On effectue deux tirages successifs avec remise.
On note $X$ la v.a. qui vaut 1 si la première boule tirée est blanche, et 0 si elle est noire. De même, on note $Y$ la v.a. qui vaut 1 si la deuxième boule tirée est blanche, et 0 si elle est noire.
On s'intéresse à la v.a $X + Y$.
Se pose la question du choix du modèle permettant de justifier que $X$ et $Y$ suivent une loi de Bernoulli et $X + Y$, une loi binomiale. Nous proposons ci-dessous 3 rédactions possibles :

<u>Rédaction 1</u> : Un peu longue mais à privilégier notamment au début avec les élèves pour lever tous les implicites. Elle démontre l'indépendance de $X$ et $Y$ au lieu d'en faire une hypothèse, à partir de l'hypothèse d'équiprobabilité sur les tirages des boules.

On note $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ l'ensemble représentant l'urne.

$B = \{1 ; 2 ; 3\}$, l'ensemble représentant les boules blanches.

$N = \{4 ; 5\}$, l'ensemble représentant les boules noires.

Soit $\Omega = \{(x; y) \ / \ x \in U \text{ et } y \in U\}$ l'ensemble des tirages possibles.

$X$ est définie de $\Omega$ dans $\{0 ; 1\}$ par $(x ; y) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ si } x \in N \end{cases}$

$Y$ est définie de $\Omega$ dans $\{0 ; 1\}$ par $(x ; y) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } y \in B \\ 0 \text{ si } y \in N \end{cases}$

On munit $\Omega$ de la probabilité uniforme que l'on note $P$. En effet, les tirages ont lieu avec remise, tous les couples de boules semblent avoir la même chance de « sortir ». On peut alors calculer la loi de $(X , Y)$ :

$P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{\text{nombre de (x,y) où } x \in B \text{ et } y \in B}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(\text{nb éléments de B})^2}{(\text{nb éléments de U})^2} = \frac{3^2}{5^2} = (\frac{3}{5})^2 = p^2$ avec $p = \frac{3}{5}$ (nombre d'éléments d'un produit cartésien)

De même

$P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = \frac{\text{nombre de (x,y) où } x \in B \text{ et } y \in N}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(\text{nb elts de B})\times(\text{nb élts deN})}{(\text{nb élts de U})^2} = \frac{3 \times 2}{5^2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = p(1-p)$

On montrerait que :

$P(X = 0 \text{ et } Y = 1) = p(1-p)$ et $P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = (1-p)^2$

On en déduit la loi de $X$ :

$P(X = 1) = P(X = 1 \text{ et } Y = 1) + P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = p^2 + p(1-p)p$ puis $P(X = 1) = 1 - p$

Ainsi $X$ suit loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{5}$.

On procède de même pour montrer que $Y$ suit loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{5}$.

On montre ensuite que $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{3}{5} = 0{,}6$ :

$P(X + Y = 2) = P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = p^2$ ; $P(X + Y = 1) = P(X = 1 \text{ et } Y = 0) + P(X = 0 \text{ et } Y = 1) = 2p(1-p)$ et $P(X + Y = 0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = (1-p)^2$

<u>Rédaction 2 :</u> C'est la version ensembliste de la rédaction 3. Les hypothèses sont légèrement différentes mais équivalentes.

On considère $\Omega = \{(B; B), (B; N); (N, B); (N, N)\}$ où chaque issue représente la suite des couleurs des boules tirées. On définit une probabilité sur $\Omega$ telle que la probabilité que la première boule tirée soit blanche est $p = \frac{3}{5}$ (équiprobabilité du tirage d'une boule dans l'urne) et la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche est p.

Les tirages des 2 boules sont indépendants. Dans cette modélisation, $X$ et $Y$ sont définies de $\Omega$ dans $\{0 ; 1\}$ par : $X : (x; y) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = B \\ 0 \text{ si } x = N \end{cases}$ et $Y : (x; y) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } y = B \\ 0 \text{ si } y = N \end{cases}$

On trouve la loi de $(X , Y)$

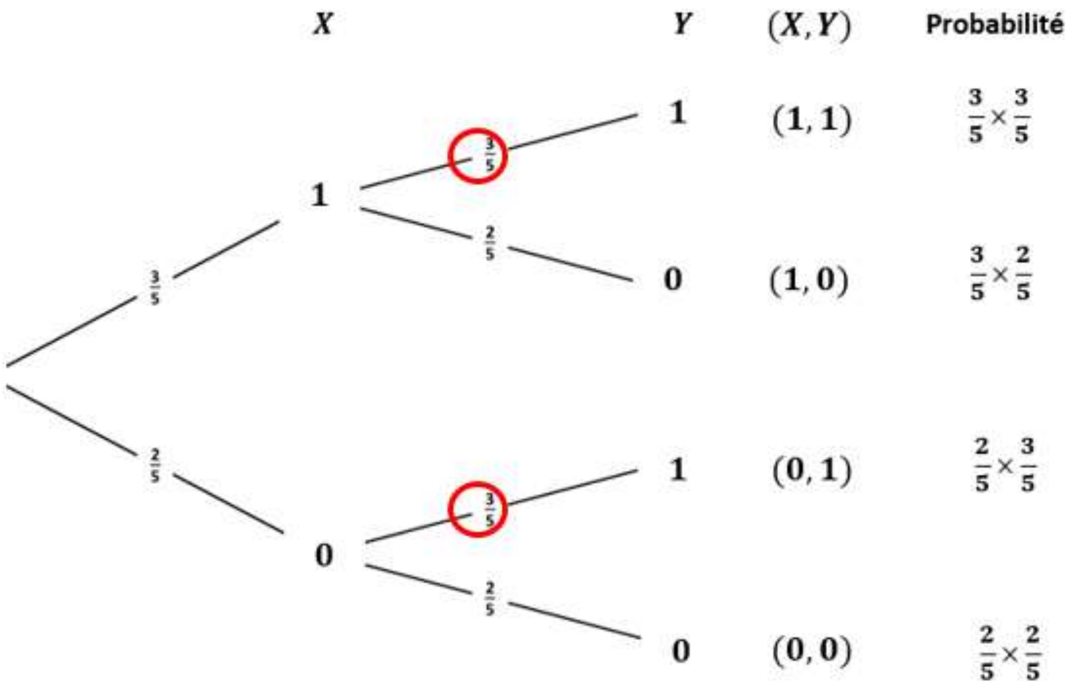
$P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = p^2$ ( car $X$ et $Y$ sont indépendantes)

$P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = P(X = 1)P(X = 0) = p(1-p)$ etc.

On retrouve les mêmes résultats et on conclut de la même manière que $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Rédaction 3 : Plus graphique et intuitive.

On utilise un arbre de probabilité comme modèle :




C'est une version graphique de la rédaction 2 :

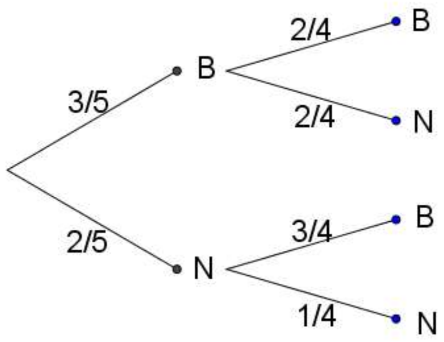
- L'arbre représente un univers dont les issues sont les différentes feuilles de l'arbre. Chaque feuille peut être représentées par la suite des étiquettes menant de la racine à la feuille. On obtient comme ensemble $\{(0,0); (0,1) ; (1,0); (1,1)\}$
- Les poids correspondent aux hypothèses suivantes :
  la probabilité que la première boule tirée soit blanche est $\mathrm{p} = \frac{3}{5}$
  quelle que soit la première boule tirée, la probabilité que la seconde boule tirée soit blanche est égale à $\frac{3}{5}$. Cela signifie que les probabilités conditionnelles entourées en rouge valent toutes $\frac{3}{5}$.

La loi de $(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est décrite à droite de l'arbre et on finit comme avant.

L'exercice se termine ainsi : $E(X) = E(Y) = 0{,}6$ et $V(X) = V(Y) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$. (Bernoulli)

On a donc $E(X+Y) = 2 \times 0{,}6 = 1{,}2$ et $V(X+Y) = 2 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$. (Binomiale)
$X$ et $Y$ sont indépendantes, et on a bien $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

2. **Application de sa contraposée** : On reprend l'exemple précédent mais avec un tirage sans remise.




P$(Y = 1) = P(X = 1) \times P_{(X=1)}(Y = 1) + P(X = 0) \times P_{(X=0)}(Y = 1) = 0{,}6$

Loi de Y :

| $k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(Y = k)$ | 0,4 | 0,6 |

Là encore, $X$ et $Y$ suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}6$.
On a donc encore $E(X) = E(Y) = 0{,}6$ et $V(X) = V(Y) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$.

Donnons la loi de probabilité de $X + Y$ :

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X + Y = k)$ | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

Il vient alors que : $E(X + Y) = 1{,}2$ et que $V(X + Y) = 0{,}36$
Or $V(X) + V(Y) = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$ soit $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$.

On en déduit que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.
( En effet, par exemple :
$P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ alors que $P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$)

3. **Montrons que la réciproque est fausse à l'aide d'un contre-exemple :** Reprenons l'exemple 2 de la page 4. On lance deux dés. On note $X$ la somme des nombres obtenus et $Y$ leur différence (en valeur absolue). Dans cette situation, $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes. On pose $Z = X + Y$.
On a vu que :

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = k)$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |

| $k$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X + Y = k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

$V(X) = \frac{35}{6}$ ; $V(Y) = \frac{665}{324}$ et $V(X+Y) = \frac{2555}{324}$,

on a : $V(X) + V(Y) = \frac{35}{6} + \frac{665}{324} = \frac{2555}{324} = V(X+Y)$ mais $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes

# II. Loi faible des grands nombres

| Extrait du programme |
| --- |
| Dans la troisième section, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev explicite le rôle de la variance comme indicateur de dispersion. Tous ces outils se conjuguent pour établir l'inégalité de concentration pour la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire, qui justifie l'apparition du facteur $1/\sqrt{n}$ en théorie de l'estimation, aperçue expérimentalement en classe de seconde, et permet d'aboutir à la démonstration de la loi des grands nombres. |

## 1. Inégalité de Markov

**Propriété** : Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$, à valeurs **positives**. Pour tout $a > 0$ :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

**Démonstration** : On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ avec $x_i \geq 0$ pour tout $i$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{r} x_k P(X = x_k)$$

$$E(X) = \sum_{\substack{k=1 \\ x_k < a}}^{r} x_k P(X = x_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \geq a}}^{r} x_k P(X = x_k)$$

$$E(X) \geq \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \geq a}}^{r} x_k P(X = x_k) \qquad \text{puisque} \sum_{\substack{k=1 \\ x_k < a}}^{r} x_k P(X = x_k) \geq 0$$

$$E(X) \geq \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \geq a}}^{r} a P(X = x_k)$$

$$E(X) \geq a \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \geq a}}^{r} P(X = x_k)$$

$$E(X) \geq a P(X \geq a)$$

$$\text{D'où : } P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

## 2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Propriété** : Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$. Pour tout $\delta > 0$ :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

**Démonstration** : On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\left(X - E(X)\right)^2$ avec $a = \delta^2$

On a donc :

$$P\left(\left(X - E(X)\right)^2 \geq \delta^2\right) \leq \frac{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}{\delta^2}$$

Or, quel que soit $\omega$ dans $\Omega$, $\left(X(\omega) - E(X)\right)^2 \geq \delta^2 \Leftrightarrow |X(\omega) - E(X)| \geq \delta$ .

De plus $E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = V(X)$.

Il en découle :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

## 3. Inégalité de concentration

**Propriété** : On considère $n$ variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur $\Omega$ , de même loi d'espérance $\mu$ et de variance $V$. On note :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ , la v.a "moyenne" de ces variables aléatoires.}$$

Pour tout $\delta > 0$ on a:

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

**Démonstration** :

Calculons d'abord l'espérance et la variance de $M_n$

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$$

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V = \frac{1}{n^2} \times nV = \frac{V}{n}$$

(Pour la variance, le passage entre la 3ème et la 4ème expression est possible car les $X_i$ sont indépendants.)

On applique maintenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $M_n$ :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$$

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

## 4. Loi faible des grands nombres

**Propriété** : On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$,… une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance $\mu$ et de variance $V$. Pour tout $\delta > 0$ on a:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

## 5. Compléments algorithmiques

| Extrait du programme |
| --- |
| **Capacité attendue**<br>– Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi. |

**Exercice 1** :

On souhaite tester un dé à six faces afin de savoir s'il est truqué. On s'intéresse en particulier à l'apparition du 6. Notons p la probabilité d'obtenir 6. Pour cela on lance $n$ fois ce dé ($n$ étant un entier naturel non nul).
Pour tout entier i compris entre 1 et $n$, on pose $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si on a obtenu un 6 et 0 sinon.

1. Donner la loi de la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus.
2. On note $F_n$ la fréquence d'apparition du 6. Exprimer $F_n$ en fonction de $X_1$, ..., $X_n$, puis calculer son espérance et sa variance.
3. On suppose le dé non truqué. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $F_n$, déterminer un nombre de lancers de dé permettant d'affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 0, 05, que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 0, 01. (Fichier Python : BT-ex1.py)

Correction exercice 1 :

1. 1ère méthode : Les lancers du dé sont réalisés de manière identique et indépendante. Ainsi chaque répétition de cette expérience forme un schéma de Bernoulli dont le succès est l'événement « Obtenir un 6 », de probabilité $p$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de 6 suit donc la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

   2ème méthode : La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de 6 vérifie :

   $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

   Or, pour tout i compris entre 1 et $n$, $X_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$. Comme les $X_i$ sont indépendants, $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

2. On a :

   $$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}X$$

   On a ainsi :

$$E(F_n) = E\left(\frac{1}{n}X\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$$
$$V(F_n) = V\left(\frac{1}{n}X\right) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}$$

Pour $\delta = 0{,}01$ on obtient :

$$P(|F_n - p| \geq 0{,}01) \leq \frac{p(1-p)}{n \times 0{,}01^2}$$

Comme $p = \frac{1}{6}$,

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01\right) \leq \frac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}{n \times 0{,}01^2}$$
$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01\right) \leq \frac{50000}{36n}$$

On cherche $n$ tel que :

$$\frac{50000}{36n} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{36n}{50000} \geq 20$$

Car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{20 \times 50000}{36}$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{250000}{9} \qquad (\approx 27777{,}8)$$

Donc, pour $n = 27778$ :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01\right) \leq \frac{5000}{36n} \leq 0{,}05$$

Ainsi la probabilité que la fréquence de 6 diffère de $\frac{1}{6}$ de plus de 0,01 est inférieure à 0,05.

**<u>Exercice 2</u>** : (Fichier python : BT-ex2.py)

*D'un point de vue théorique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est fondamentale car elle montre que la probabilité de s'écarter de l'espérance est d'autant plus faible que la variance est faible. Elle est de plus universelle !*
*En revanche d'un point de vue pratique, les résultats fournis sont assez mauvais !*

Soit une pièce de monnaie bien équilibrée. On effectue $n$ lancers et on note $F_n$ la fréquence d'apparition de PILE.

1. Déterminer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un nombre de lancers permettant d'affirmer avec un risque d'erreur d'au plus 5%, que $F_n$ s'écarte de 0,5 d'au plus de 0,1.

Comparer avec l'intervalle de fluctuation vu en classe de seconde : $I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Correction exercice 2 :

1. Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, on pose $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si on a obtenu PILE et 0 sinon. Les $X_i$ sont indépendants et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}5$.
   Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$ on a :
   $$E(X_i) = p = 0{,}5$$
   $$V(X_i) = p(1-p) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$

   On a :
   $$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
   D'où :
   $$E(F_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0{,}5 = \frac{1}{n} \times n \times 0{,}5 = 0{,}5$$
   $$V(F_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 0{,}25 = \frac{1}{n^2} \times n \times 0{,}25 = \frac{0{,}25}{n}$$

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta = 0{,}1$ on a :
   $$P(|F_n - E(F_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}$$
   $$P(|F_n - p| \geq 0{,}1) \leq \frac{0{,}25}{n \times 0{,}1^2}$$
   $$P(|F_n - p| \geq 0{,}1) \leq \frac{25}{n}$$
   De plus, $\frac{25}{n} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{n}{25} \geq 20$
   $\Leftrightarrow n \geq 500$

   Ainsi si $n = 500$
   $$P(|F_n - p| \geq 0{,}1) \leq \frac{25}{n} \leq 0{,}05$$

2. En classe de seconde, on a constaté par simulation qu'environ 95 % des échantillons ont une fréquence d'apparition du 6 qui appartient à l'intervalle $I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   On s'appuie sur cette observation pour déterminer $n$ sachant qu'on veut :
   $$I_f = [0{,}5 - 0{,}1; 0{,}5 + 0{,}1] = [0{,}4; 0{,}6]$$

   On cherche donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
   $$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}1 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 10$$
   $$\Leftrightarrow n = 100$$

   On constate que la valeur donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est 5 fois plus grande.

| Extrait du programme |
| --- |
| **Exemples d'algorithme**<br>– Calculer la probabilité de ($\lvert S_n - pn \rvert > \sqrt{n}$), où $S_n$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. |

→ Voir fichier python : Sn-np.py

**Remarques :**

$$|S_n - pn| > \sqrt{n} \Leftrightarrow \left|\frac{S_n - pn}{n}\right| > \frac{\sqrt{n}}{n}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ainsi l'algorithme proposé permet de constater que la probabilité que $\frac{S_n}{n}$ s'écarte de $p$ de plus de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est le plus souvent inférieure à 0,05.

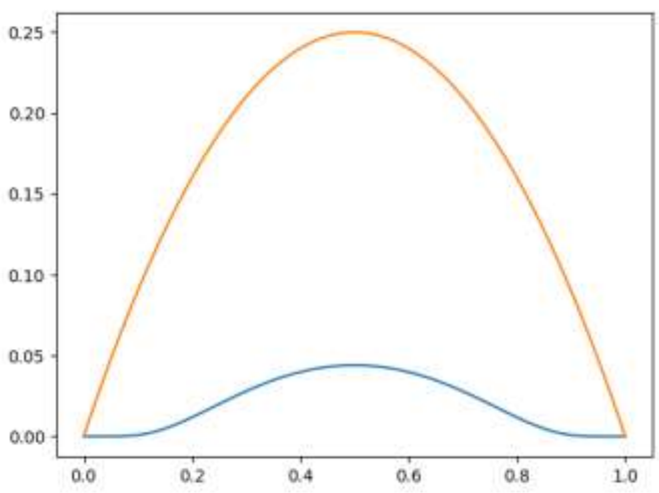
Par ailleurs en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $S_n$ pour $\delta = \sqrt{n}$, on obtient que :

$$P(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \leq \frac{np(1-p)}{(\sqrt{n})^2}$$
$$P(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \leq p(1-p)$$

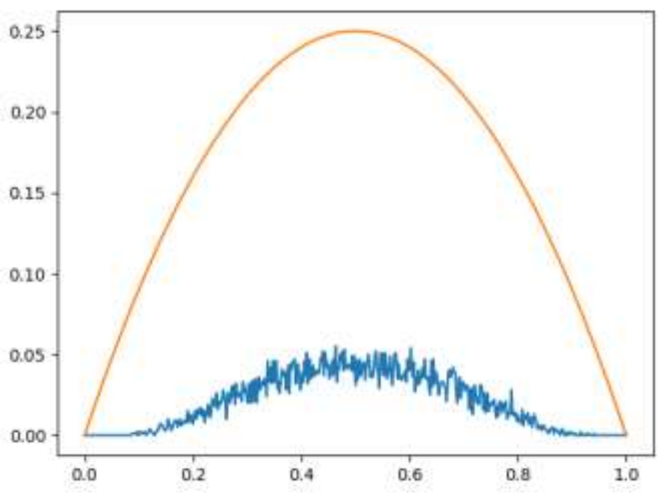
Le fichier Sn-np.py propose les fonctions suivantes :

- Nechantillons(N,n,p) : Cette fonction simule N échantillons d'une loi binomiale $S_n$ de paramètres n et p. Elle renvoie alors la proportion d'échantillons pour lesquelles $|S_n - pn| > \sqrt{n}$.
- courbe(N,n) : Cette fonction trace en bleu la proportion renvoyée par la fonction Nechantillons en fonction de p. On constate que cette proportion est inférieure à 0,05.
  On compare avec le majorant découlant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev représenté en orange. On constate que cette majoration est grossière.

<u>*Représentation de $P(|S_n - np| \geq \sqrt{n})$ en fonction de p*</u>




Résultat théorique (en sommant les $P(X = k)$) avec n=500




Par la fonction courbe(N,n) avec N=1000 et n=500

| Extrait du programme |
| --- |
| **Exemples d'algorithme**<br>– Simuler $N$ échantillons de taille $n$ d'une variable aléatoire d'espérance $\mu$ et d'écart type $\sigma$. Calculer l'écart type $s$ de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\sigma/\sqrt{n}$. Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et $\mu$ est inférieur ou égal à $ks$, ou à $k\sigma/\sqrt{n}$, pour $k = 1, 2, 3$. |

→ Voir fichier python : simu_moyenne_va.py

L'expérience choisie consiste à lancer deux dés et à noter la somme des dés.

La loi de probabilité de $X$ est bien connue. On obtient ainsi $E(X) = 7,\ V(X) = \frac{35}{6}$ et $\sigma(X) \approx 2{,}4152$

Remarques : Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance $\mu$, de variance $V$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{V}$. On note :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

On a vu au paragraphe 3. que $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$. On a donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{V}{n}} = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ainsi l'idée est de calculer l'écart type de la série statistique constituée de $N$ valeurs, chacune étant la moyenne des résultats de $n$ simulations de l'expérience aléatoire. Ensuite on compare cet écart type statistique à l'écart type probabiliste $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. (appelé parfois erreur-type de la moyenne).

Les valeurs sont très proches. L'idée est de comprendre que sur un grand nombre d'échantillons de taille $n$, la moyenne observée se rapproche de $\mu$ avec un écart type inversement proportionnel à la racine carré de $n$ : plus $n$ est grand, plus faible est la probabilité de s'éloigner de $\mu$.

*Répartition de la moyenne pour 10000 échantillons de taille 10, 25, 100 et 400.*