Module n°1

Extraits du rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » (rapport Villani Torossian)

Objectif : **clarifier les attendus d'un cours de mathématiques, et notamment des traces écrites de cours.**

(…)

3. RÉÉQUILIBRER ET CLARIFIER L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Parler de rééquilibrer n'a de sens que si au préalable il y a eu déséquilibre. Si on se place sur un temps long, on peut estimer que c'est bien ce qui s'est passé pour l'enseignement des mathématiques.

Si le projet des mathématiques modernes des années 1960-1970, issues du mouvement bourbakiste et portant sur la nature des contenus enseignés, était théoriquement louable, il faut bien reconnaître que sa mise en pratique dans l'enseignement non universitaire a été un échec retentissant. Pour tenter d'y remédier, on s'est réclamé d'un autre mot d'ordre, plutôt pédagogique : l'élève doit faire des mathématiques. Il est vrai que le mathématicien fait des mathématiques, et sa pratique est originale au sens qu'il crée une chose nouvelle. Mais on a trop souvent oublié que pour faire des mathématiques, il faut au préalable en avoir appris. La multiplication des activités de toutes sortes plaçant l'élève au centre de ses apprentissages, voire de la construction de ses propres savoirs, a procédé d'une intention tout aussi louable. Force est de constater, aujourd'hui, que les résultats ne sont plus au rendez-vous et que les publics les plus fragiles socialement y ont plutôt perdu.

Rééquilibrer, signifie avoir l'ambition de redresser la barre, sans pour autant déstabiliser l'organisation ni le corpus dialectique de la discipline ; infléchir au lieu de révolutionner, tenir compte de ce qui existe, de ce qui fonctionne mieux ailleurs, afin de constituer un corpus auquel chacun peut se référer.

Le besoin de **clarification** n'est pas moins important. L'enseignant doit savoir ce qu'il doit enseigner, pour garantir une équité de territoire dans le cadre d'un enseignement à dimension nationale, et c'est pourquoi il faut des programmes. Mais il faut aussi que ceux-ci permettent au professeur de bien cerner l'objectif qui lui est fixé. La présidente du conseil supérieur des programmes, Madame Souâd Ayada l'a encore rappelé récemment : il est essentiel de rendre les programmes intelligibles.

- Pour que l'élève s'engage et apprenne, il faut que les attendus soient clairs.
- Il en va de même pour l'enseignant : la demande doit être claire et explicite, de façon à ce qu'il sache ce que l'Institution attend de lui.

Enfin, concernant la **cohérence**, les propos de Pierre Arnoux [32] résument parfaitement l'orientation que préconise la mission :

> *« Une meilleure cohérence dans l'enseignement augmente fortement son efficacité. Tout d'abord cohérence sur une année, à l'intérieur d'une discipline : suivre un programme mieux construit, où l'on établit des liens entre les divers domaines (algèbre, géométrie, analyse, probabilités et statistiques). Cela relève d'un travail didactique, de documents de programmes et d'accompagnement, et de la formation continue. Ensuite, cohérence entre disciplines : la scission entre mathématiques et physique est une cause majeure de l'affaiblissement de la formation. Enfin, cohérence le long du cursus, où l'on explique comment l'enseignement d'une année reprend et prolonge celui des années précédentes. »*

[32] [Table croisée 3]

3.1. Le cours

Comme l'expliquait Paul Lockhart [33], les mathématiques sont un art et c'est pourquoi l'enseignement des mathématiques, et ce dès le plus jeune âge, doit être un dosage subtil entre technique et art, les deux étant intrinsèquement mélangés grâce au plaisir et au rêve. L calcul lui-même doit passer de l'état de technique à l'état d'art.

La question de savoir à quoi sert le cours de mathématiques est encore très souvent posée : il est essentiel de comprendre qu'en plus d'une culture mathématique citoyenne nécessaire, le cours de mathématiques apporte, au-delà du raisonnement logique, de l'esprit critique, de la rigueur et de l'autonomie, la capacité à établir des vérités absolues à travers des preuves. C'est une caractéristique forte de notre culture.

S'il ne suffit pas que le professeur enseigne bien pour que les élèves apprennent bien, il n'empêche que certaines conditions d'enseignement se révèlent plus efficaces que d'autres en termes d'apprentissage.

Si l'on récapitule les missions du cours de mathématiques, on voit qu'il remplit des objectifs très variés : assurer aux futurs citoyens des compétences minimales dans le maniement des concepts mathématiques, leur donner les clés d'un raisonnement logique de qualité, les sensibiliser à l'importance des sciences mathématiques dans notre culture, notre histoire, notre technologie, préparer de futurs scientifiques, ingénieurs et mathématiciens à des métiers de plus en plus nombreux. La poursuite de tous ces objectifs demande un savant dosage qui ne peut s'improviser et nécessite une préparation spécifique.

En aucun cas ce rapport n'entend établir de dogme ou de bréviaire sur ce que serait un bon cours de mathématiques. En revanche, il propose des pistes pour renouveler les pratiques observées, certaines ayant montré leurs limites. Ce constat est unanimement partagé par les personnes qui ont été entendues par la mission.

On a pu constater, depuis le début des années 1990, la substitution du cours par des activités diverses (activités de découverte, tâches complexes censées développer des compétences transversales, démarche d'investigation, démarche de projet, activités interdisciplinaires, etc.) qui n'avaient pourtant pas vocation à le faire disparaître.

La volonté de rendre les élèves chercheurs peut être pertinente, bien évidemment, mais l'on peut s'interroger, en termes d'efficacité, sur le choix des moments, des durées, des thèmes de ces recherches, voire la manière dont elles sont conduites.

Les activités de découverte sont trop souvent artificielles, le monde réel s'avérant beaucoup plus difficile à appréhender que les modèles mathématiques utilisés pour le décrire ; souvent, les contextes retenus perturbent les élèves plutôt qu'ils ne les aident et ces modèles sont tellement simplifiés qu'ils n'apportent pas de réelle plus-value aux disciplines auxquelles ils sont empruntés (économie, sciences physiques, etc.).

De même, les tâches complexes n'ont pas toujours un objectif d'apprentissage mathématique clair. Leur conception s'avère extrêmement chronophage pour les professeurs et leur résolution l'est également pour les élèves, sans pour autant être toujours porteuse d'apprentissage, notamment auprès des plus faibles en mathématiques.

---

[33] Paul Lckhart, *Mathematician's Lament: How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form*. 2009 Bellevue Literary Press. Traduction française disponible en ebook (2017).

De manière générale, ces activités visent à « faire » plutôt qu'à « apprendre ». Très difficiles à mener de façon efficiente, elles peuvent s'avérer opportunes mais ne doivent en aucun cas se substituer à une vraie phase de formalisation ni à un travail régulier d'entraînement.
Pour pouvoir utiliser les mathématiques avec efficacité, notamment dans des situations complexes, il faut avoir acquis des connaissances, des méthodes, et avoir été sensibilisé aux stratégies de résolution de problèmes spécifiques à la discipline. Toutes ces choses doivent être aussi enseignées. On ne développe des compétences solides qu'en s'appuyant sur des connaissances solides. Plus généralement, il faut tendre vers une plus grande efficacité et s'interroger sur ce que chaque élève a appris à l'issue d'une séance.

3.1.1. Le cours (la trace écrite)

Le plaisir d'apprendre et de faire des mathématiques passe à tout âge par une bonne compréhension des concepts. La trace écrite est une référence qui permet à l'élève de structurer sa pensée, son savoir et ses compétences. Il ne faut pas la négliger.

Sa raison d'être

Une trace écrite a pour but d'aider l'élève dans ses apprentissages en redonnant toute sa place à l'acquisition de connaissances. Elle doit favoriser « la mise en mémoire » ; cela facilitera d'autant l'accès aux compétences, qui ne peuvent se construire sur des savoirs ténus ou peu ancrés. Tous les élèves doivent bénéficier d'une trace écrite de qualité leur permettant de s'y référer autant que de besoin, notamment lors de la résolution d'exercices et de problèmes, avec l'aide de leur professeur. Les sciences cognitives nous apprennent qu'il faut revenir au moins cinq fois sur l'apprentissage de son cours (lecture d'un énoncé ou d'une propriété) pour l'ancrer définitivement en mémoire, mais qu'il est infiniment plus efficace de s'y référer explicitement à travers des exercices ou des problèmes (par exemple ouvrir son cahier de cours au moment où l'on fait l'exercice en question) plutôt que de le relire hors de tout contexte.

Le contenu

Les traces écrites de cours dans lesquelles des connaissances et des méthodes sont récapitulées sans articulation logique, sans cohérence et donc sans essence mathématique, sont sources de confusion. Elles ne permettent pas aux élèves de progresser dans la compréhension.

La trace écrite doit servir de référence et ne pas se limiter à un « catalogue » de résultats ou de recettes. Les définitions et propriétés doivent être clairement identifiées. La trace écrite doit à la fois respecter les enchaînements logiques, être rigoureuse et précise, et être compréhensible. Le professeur pourra avec avantage expliciter certains énoncés mathématiques, notamment au niveau de la scolarité obligatoire, par une reformulation en français courant compréhensible par le plus grand nombre (y compris les familles et les accompagnateurs du périscolaire).

Une fois encore, la clarté des énoncés proposés est essentielle.

Le rôle du professeur

Le professeur doit retrouver toute sa place dans les moments de « présentation et commentaires des savoirs » (le cours). Qui mieux que le professeur peut exposer pas à pas un texte de définition, de théorème, de propriété, en en expliquant les tenants et les aboutissants, le pourquoi de tel élément de quantification, son importance, la nécessité de la précision de tel terme ?

Le professeur doit ainsi retrouver la fierté de son savoir et de son aptitude à l'exposer et l'expliquer. Cela ne peut que renforcer sa légitimité et le respect que ses élèves lui témoignent.

Une simple vidéo projection d'un texte de cours « clés en main » n'est pas pertinente ; elle exclut trop le professeur et toute la richesse qu'il peut apporter.

À quel moment la placer ?

La trace écrite ne peut arriver qu'après des étapes importantes comme celles où les élèves manipulent, s'approprient les notions avec leur cheminement, leurs mots. Ce passage de la manipulation, de la découverte, vers l'abstraction doit vraiment prendre appui sur une phase intermédiaire, souvent oubliée ou trop implicite : la phase de verbalisation, de « mise en mots » par les élèves. Et ceci de la maternelle au lycée ; ces trois phases d'apprentissage peuvent se résumer dans le triptyque : manipuler, verbaliser, abstraire.

Les sciences cognitives, nous rappellent que l'attention des élèves joue un rôle crucial pour un apprentissage efficace et que par ailleurs leur capacité de concentration est réduite en temps (35 minutes sur une phase de cours de 55 minutes). Il convient donc que la phase écrite soit terminée à ce moment, pour laisser place à un autre temps. Reporter la trace écrite à une autre séance est tout simplement inefficace.

Remarques

Il ne s'agit bien sûr pas de préconiser des séances entières de « cours magistral » pendant lesquelles les élèves se contentent de copier un texte qui, pour eux, n'a aucun sens. Il s'agit plutôt de rétablir une réflexion sur les diverses phases d'apprentissage qui sont :

- les phases de recherche autonome mais encadrée ;
- les phases de cours très commentées, où l'on interroge la rédaction des énoncés mathématiques, où l'on présente certaines preuves (*cf.* §3.1.2 ci-dessous) ;
- la présentation d'exemples abondants, matière à débats, pour s'assurer de la compréhension de tous, en étant très à l'écoute des élèves ;
- la mise en application par les élèves, en autonomie, sur des cas très simples d'abord, puis de plus en plus substantiels ;
- les rituels, indispensables pour faire fonctionner et stabiliser les connaissances, les méthodes et les stratégies ;
- l'étude de problèmes internes aux mathématiques et pas seulement de situations appliquées.

3.1.2. La preuve

Au dire d'enseignants-chercheurs auditionnés, de nombreux étudiants arrivant à l'université éprouvent des difficultés à comprendre ce qu'est une preuve et en quoi elle est essentielle en mathématiques. Les vérités sont trop souvent assénées, plutôt que démontrées. D'une certaine manière, l'enseignement des mathématiques est devenu axiomatique et nombre d'élèves du collège n'imaginent pas que le théorème de Pythagore puisse se démontrer.

Or la notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique, quel que soit le niveau (de façon adaptée, cette assertion est valable de la maternelle à l'université). Et, au-delà de la théorie mathématique, comprendre ce qu'est une démarche de justification argumentée reposant sur la logique est un axe important de la formation du citoyen (*cf.* §3.3.1).

Les graines de cette démarche fondamentalement mathématique sont semées dès les petites classes.

L'acquisition de formes d'argumentation propres aux mathématiques, qui viennent compléter celles développées dans d'autres disciplines, est essentielle. Il est regrettable que les vérités mathématiques (démontrables) soient ramenées à un statut de vérités contestables.

Il se trouve que l'on peut constater une quasi disparition des « démonstrations » des résultats proposés dans les manuels de collège, par exemple, et dans certaines pratiques de classe. Il serait souhaitable de rééquilibrer ces pratiques en redonnant une place significative à la présentation de démonstrations de résultats du cours ; nous faisons confiance aux enseignants pour déterminer lesquelles, et selon quelles modalités (selon les cas : recherche, présentations, commentaires, vidéos, etc.).

Lien vers le rapport 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques à télécharger