

JDI - Plan mathématiques collège

Atelier : Présentation du guide « *La résolution de problèmes mathématiques au collège* »

Déroulé

- ❑ **Présentation générale du guide :
objectifs généraux et architecture**

- ❑ **Focus sur les patterns**

Pourquoi la résolution de problèmes ?

- ❑ La résolution de problèmes : au cœur de l'activité mathématique
- ❑ Formation d'un esprit citoyen et développement des compétences du XXIe siècle.
- ❑ Développement des six compétences mathématiques : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer
- ❑ Une perspective applicative, mais surtout une participation à la construction même des notions et de leur ancrage. A ce titre, la résolution de problème peut intervenir dans une séquence sans attendre une maîtrise complète des notions du chapitre

Pourquoi un guide sur la résolution de problèmes ?

- ❑ **Proposer une banque de problèmes avec une démarche de mise en œuvre :**
 - Triptyque : manipuler, verbaliser, abstraire
 - Développement des compétences, en particulier **représenter/ chercher/modéliser** ;
 - Donner des exercices dont les énoncés sont moins familiers aux élèves français
- ❑ **Apporter des éléments théoriques ou historiques venant de la recherche pour resituer l'intérêt d'une classe de problèmes**

Architecture du guide

- ❑ Six chapitres dédiés à des notions ou thèmes mathématiques, autour des six concepts clés de Pisa et un chapitre plus transversal concernant les démarches « pour enseigner la résolution de problèmes »

- ❑ Dans chaque chapitre :
 - Des éléments historiques
 - Un apport de la recherche
 - Parfois des éléments mathématiques
 - Des exemples de problèmes avec pour chacun : énoncé, motivation, éléments de progressivité, stratégies pédagogiques
 - Un résumé

Un fil conducteur

Le continuum didactique du CM1 au collège

- Conceptualisation de la variable du CM1 à la quatrième (patterns, modèles en barre) : problèmes arithmétiques, algébriques, algorithmiques
- De la perception au raisonnement

Continuum

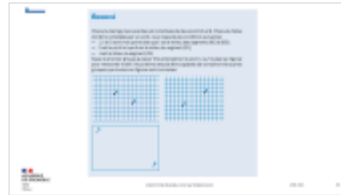
La notion de variable algébrique

- Problèmes arithmétiques : modèle en barre (p 62)
- Pré-algèbre (p 86) : exemple du triptyque manipuler/modéliser/abstraire
- Vers la pensée algébrique (p 91)



Géométrie : perception, construction, raisonnement

→ Reasonner pour construire, vs construire pour raisonner (p146 -150)



→ figure trompeuse (p139)



Former un esprit citoyen

Introduction et Chapitre 1 : données et statistiques

→ Négligence du taux de base (p 20)

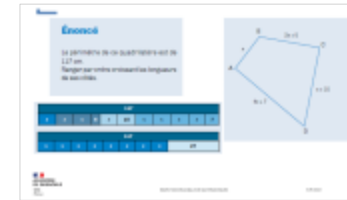
→ Moyenne glissante (p43)

Chapitre 6 : Grandeurs (p170)

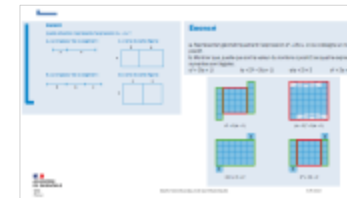


Exercices moins communs

❑ Problème algébrique et grandeurs (p96)



❑ Compétence « représenter » (P 188 et p 92)



❑ Notion de ratio

→ Deux exercices pouvant être traités par les ratios (p66 ; p 71)



❑ Les patterns

Focus sur les patterns

Introduction : comment continueriez-vous ?



B ; R ; V ; R ; B

2 ; 0 ; 2 ; 2 ; ?

Quels sont selon vous les objectifs possibles de ce type d'exercices pour les élèves de collège ?

Objectifs généraux

- Développer la créativité mathématique et l'esprit critique
- Construire des automatismes de recherche
- Développer conjointement les pensées algorithmique et algébrique
- Valoriser la verbalisation et l'argumentation

Définition de pattern

❑ Le pattern :

- anglicisme signifiant motif, modèle à reproduire ;
- suite d'objets reliés les uns aux autres par une règle spécifique.

❑ motif de base : chaîne d'éléments la plus courte qui se répète dans le motif

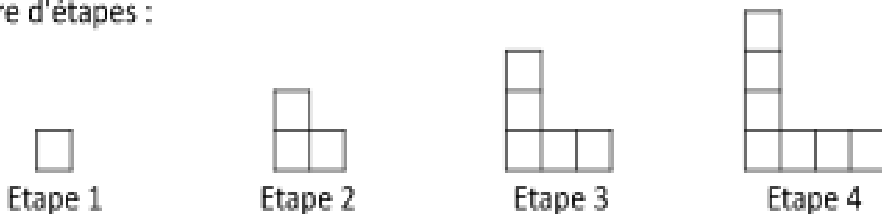
❑ Il existe des patterns : répétitifs / évolutifs ; de nombres/ figuratifs

Exemples

1 ; 4 ; 9...

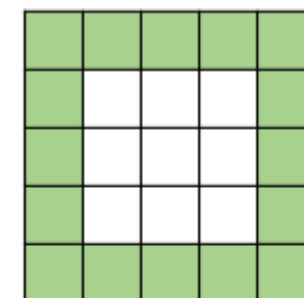
• Attendus de fin d'année de 5^e

Élaborer une formule permettant de calculer le nombre de carrés à partir du nombre d'étapes :



Ressource d'accompagnement « Du numérique au littéral »

Exemple de problème : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux colorés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.



Pensées algébrique et algorithmique

□ Pensée algébrique : est caractérisée par

- l'indéterminée, c'est-à-dire que le problème met en jeu des quantités ou nombres non connus
- la dénotation, qui consiste à désigner cette indéterminée de différentes manières possibles (langage naturel, geste, etc.) ;
- l'analyticité, qui suppose de pouvoir traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues.

[Luis Radford, 2014]

□ Pensée algorithmique : ensemble de stratégies de pensée cognitive et métacognitive liées à la modélisation de connaissances et de processus, à l'abstraction, à l'algorithmique et à l'identification, la décomposition et l'organisation de structures complexes et de suites logiques

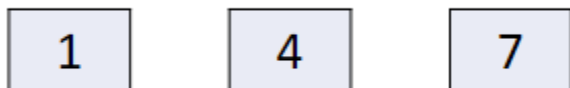
[Romero, 2016]

Phases de questionnement

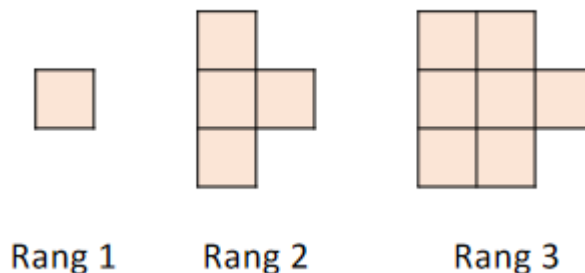
Par groupe de 3 ou 4 enseignants :

Indiquer les questionnements que vous pourriez poser aux élèves et les objectifs de ce questionnement.

Groupes de gauche : pattern de nombres



Groupes de droite : pattern figuratif



Exemple 1 de questionnement

- Écrire l'élément suivant de la série en expliquant une règle qui a permis de le calculer.

1

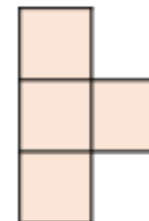
4

7

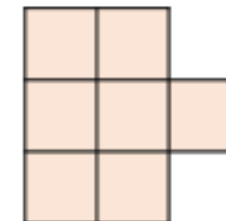
- Dessiner l'élément suivant en expliquant une règle qui a permis de le dessiner



Rang 1



Rang 2



Rang 3

Différentes régularités

❑ Régularité 1 : 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; ...

On compte de 3 en 3 à partir de 1

❑ Régularité 2 : 1 ; 4 ; 7 ; 1 ; 4 ; 7 ; 1 ; 4 ; 7 ; ...

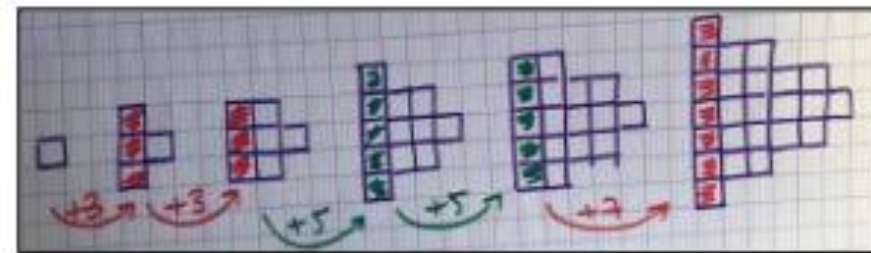
On répète les trois nombres

❑ Régularité 3 : 1 ; 4 ; 7 ; 28 ; 31 ; 124 ; ...

On fait $\times 4$ puis $+3$ et on continue en alternant

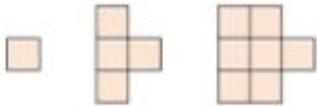
❑ Régularité no 4 : 1 ; 4 ; 7 ; 12 ; 17 ; 24 ; ...

On fait $+3$ deux fois de suite, puis $+5$ deux fois de suite, puis $+7$ deux fois de suite et on continue avec tous les nombres impairs



Pour aller plus loin

❑ Nécessité (ici) de choisir une règle : 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16...

<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 2px;">1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 2px;">4</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 2px;">7</div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin: 2px;"></div> </div>	
Consigne n° 1 : (début de cycle 3)	
Calculer le 10 ^e élément de la série	Calculer le nombre de carrés nécessaires pour construire le 10 ^e élément du pattern
Consigne n° 2 : (dès la fin de cycle 3)	
Calculer le 100 ^e élément de la série	Calculer le nombre de carrés nécessaires pour construire le 100 ^e élément du pattern
Consigne n° 3 : (dès la fin de cycle 3)	
Trouver une façon de calculer n'importe quel élément de la série	Trouver une façon de calculer le nombre nécessaire de carrés pour n'importe quel élément du pattern
Consigne n° 4 :	
96 appartient-il à la série ? 598 appartient-il à la série ?	Est-il possible d'avoir un élément de la série formé de 96 carreaux ? de 598 carreaux ?

❑ Exemple du même type p112 avec $1 + 4n$

Les possibilités de questionnement

- Dessiner le rang suivant et chercher une relation, comprendre la construction du motif (seul ou en groupe) et la verbaliser (en classe)
- Faire calculer le nombre d'éléments en étape proche
- Calculer le nombre d'éléments en étape lointaine (rang 100)
- Trouver un moyen de calculer les éléments constitutifs du pattern à n'importe quel rang
- Un nombre ou une figure fait-il partie de la série ?

Quelques mises en œuvre : en rituels

Rituel 1. Voici le début d'un pattern.

Dessiner les trois éléments suivants en expliquant la règle utilisée.



Rituel 2. Voici le début d'un pattern.

Inventer d'autres patterns qui suivent la même règle.

1^{er} cube



B R V R B R V R B

Varier :

- les patterns (évolutifs ou non, de nombres ou figuratifs)
- les types de régularités
- les types de questions avec une progressivité

Rituel 4. Voici une liste de nombres.

Si l'on poursuit la liste avec la même règle, les nombres 62 et 693 sont-ils des éléments de cette liste?

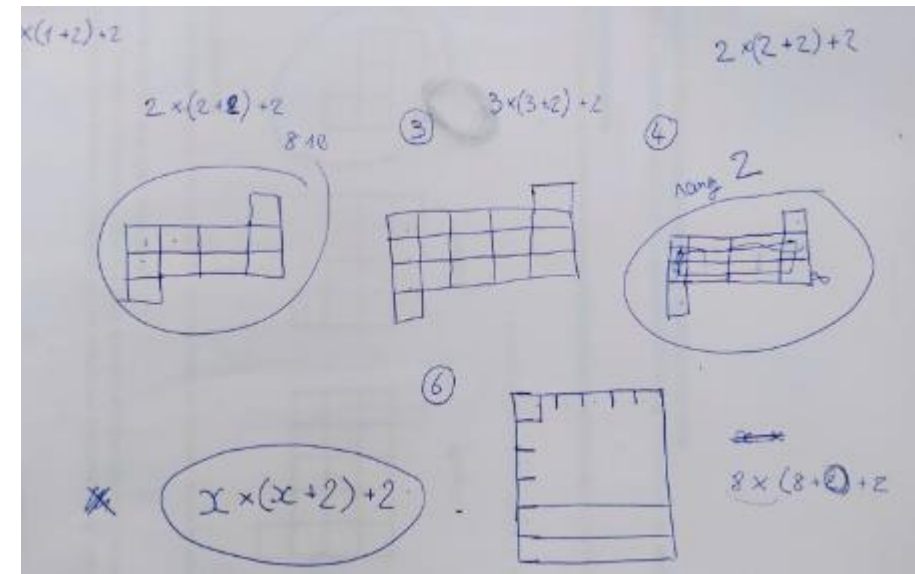
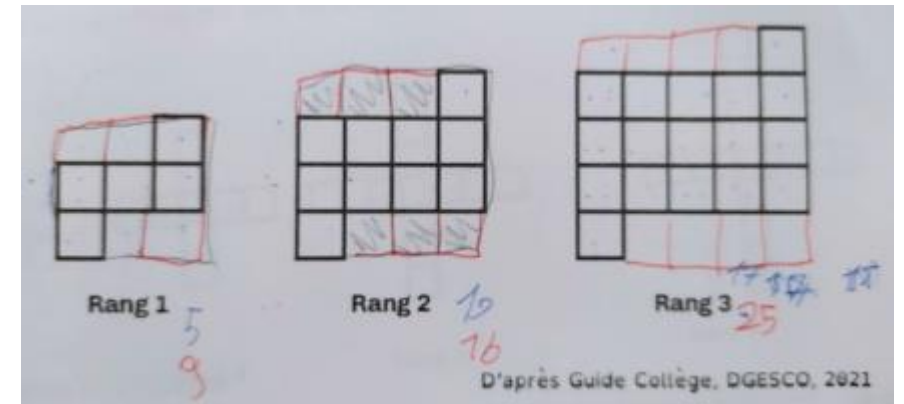
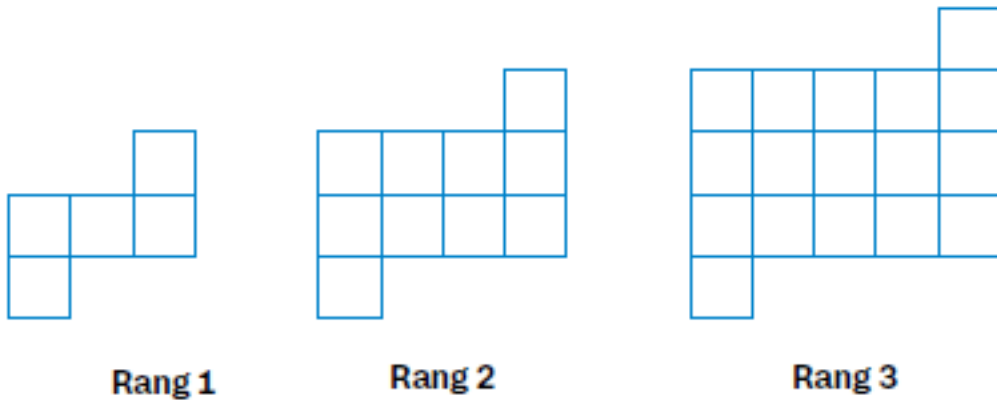
2	5	8	11	14	17	...
---	---	---	----	----	----	-----

Tâche à prise d'initiative

□ Problème 2, p 119

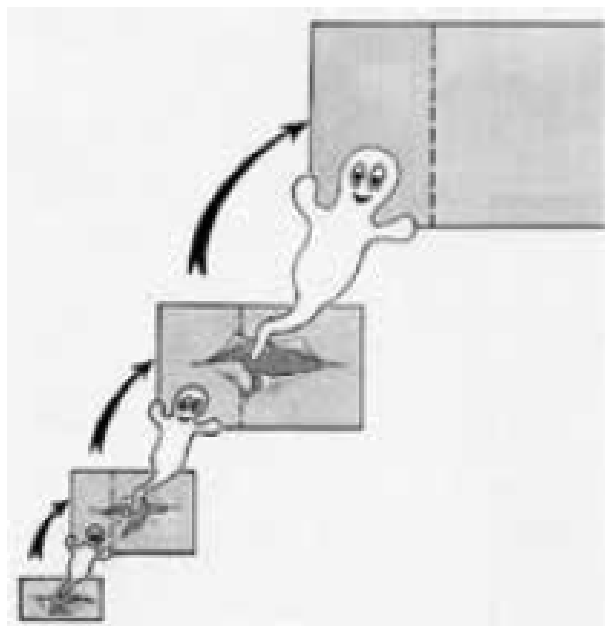
Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.

Trouver un moyen de calculer le nombre de petits carrés d'un élément à n'importe quel rang.



Problème atypique

Énoncé



C'est l'histoire d'un petit rectangle de dimensions 2 mm x 3 mm.

Chaque jour, il s'agrandit pour devenir un rectangle plus grand : sa nouvelle largeur est égale à son ancienne longueur ; sa nouvelle longueur est égale à la somme de ses deux anciennes dimensions.

Au bout de combien de jours son aire dépasse-t-elle 1,5 m² ?

Pour conclure

- Différentes mises en œuvre possibles : oral, questions *flash*, travail en groupe, tâche à prises d'initiative, problème atypique
- Liaison école – collège, collège – lycée
- Différenciation : facile à différencier / utile pour différencier
- Matériel très simple

Pour conclure : points de vigilance

- Pédagogie plus attractive, mais ne pas se contenter du jeu
- Laisser la créativité s'exprimer puis nécessité parfois de choisir une règle
- Discret (vs continu avec programme de calcul)
- Varier les situations, avec une progression dans les questions
- Expliciter les apprentissages

Merci pour votre attention

Modèle additif

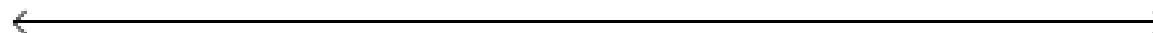
Valeur totale	
Valeur 1	Valeur 2

Les rectangles doivent être remplis par les valeurs connues ou le mot « inconnu ». La longueur de la barre rectangle n'est pas forcément proportionnelle au nombre qu'elle contient. On représente le plus petit nombre par une barre plus courte (si on dispose de l'information).

Modèle multiplicatif

Cette représentation s'appuie sur la définition de la multiplication par un entier n , $nx = x + x + \dots + x$ (n fois).

Valeur totale						
Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée



Nombre (ici 7) de parts égales

Les rectangles sont remplis comme pour le modèle additif. Les parts sont égales : les rectangles sont de même longueur.

Énoncé

Avec des jetons identiques, je construis des motifs ⁸² selon le modèle évolutif ci-contre.

- En expliquant votre règle, calculer le nombre de jetons des motifs aux rangs 4, 5 puis 10.
- Calculer le nombre de jetons du motif au rang 100.
- Trouver un moyen de calculer le nombre de jetons du motif à n'importe quel rang.



Énoncé

Pour la fête d'un village, on organise une course cycliste. Une prime totale de 320 € sera répartie entre les trois premiers coureurs. Le premier touchera la prime or, le second, la prime argent et le troisième la prime bronze. La prime or s'élève à 70 € de plus que la prime argent et la prime bronze s'élève à 80 € de moins que la prime argent. Déterminer la prime de chacun des trois premiers coureurs^{BA}.

« Brique unité » : prime argent				« Brique unité » : prime bronze			
Premier	argent		70	Premier	bronze	80	70
Deuxième	argent			Deuxième	bronze	80	
Troisième	bronze	80		Troisième	bronze		
↔							
argent	argent	argent	70	320			
			80	bronze	bronze	bronze	230
(en ajoutant une brique de 80)							

Au cycle 4, le passage du registre de représentation graphique (modèle en barres) au registre des équations amène aux équations suivantes :

Si x représente le prix argent :

$$(x + 70) + x + (x - 80) = 320$$

$$x + x + x + 70 = 400$$

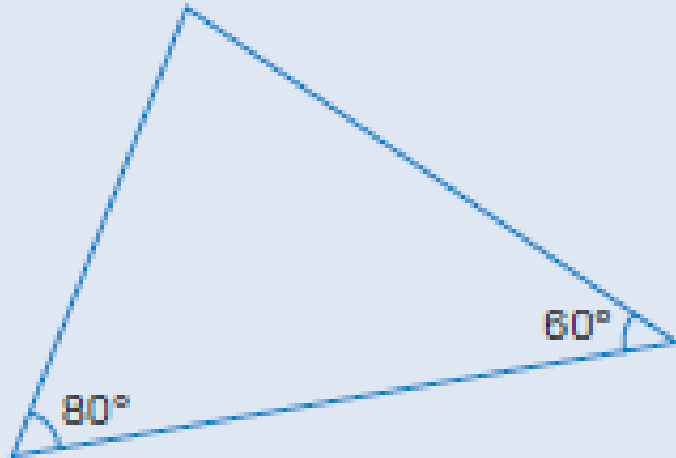
Si x représente le prix bronze :

$$x + (x + 80) + (x + 150) = 320$$

$$3x + 230 = 320$$

Énoncé

Construire le plus précisément possible un triangle qui comporte un angle de 60° et un autre de 80° et dont le périmètre est égal à 15 cm ¹³⁷.

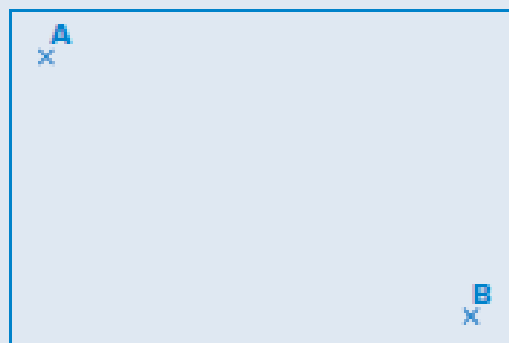
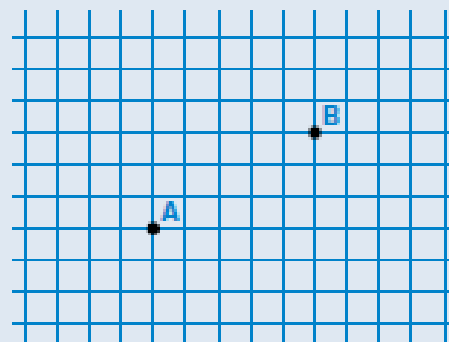
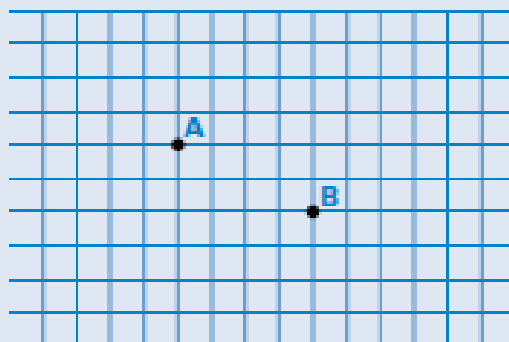


Énoncé

Chacune des figures suivantes est constituée de deux points A et B. Chacune d'elles doit être complétée par un point J qui respecte les conditions suivantes :

- I, C et D sont trois points tels que I est le milieu des segments [AC] et [BD];
- E est le point tel que A est le milieu du segment [DE];
- J est le milieu du segment [CE].

Soyez le premier groupe à placer très précisément le point J sur toutes les figures pour remporter le défi. Vous devrez ensuite être capables de convaincre les autres groupes que toutes vos figures sont correctes !

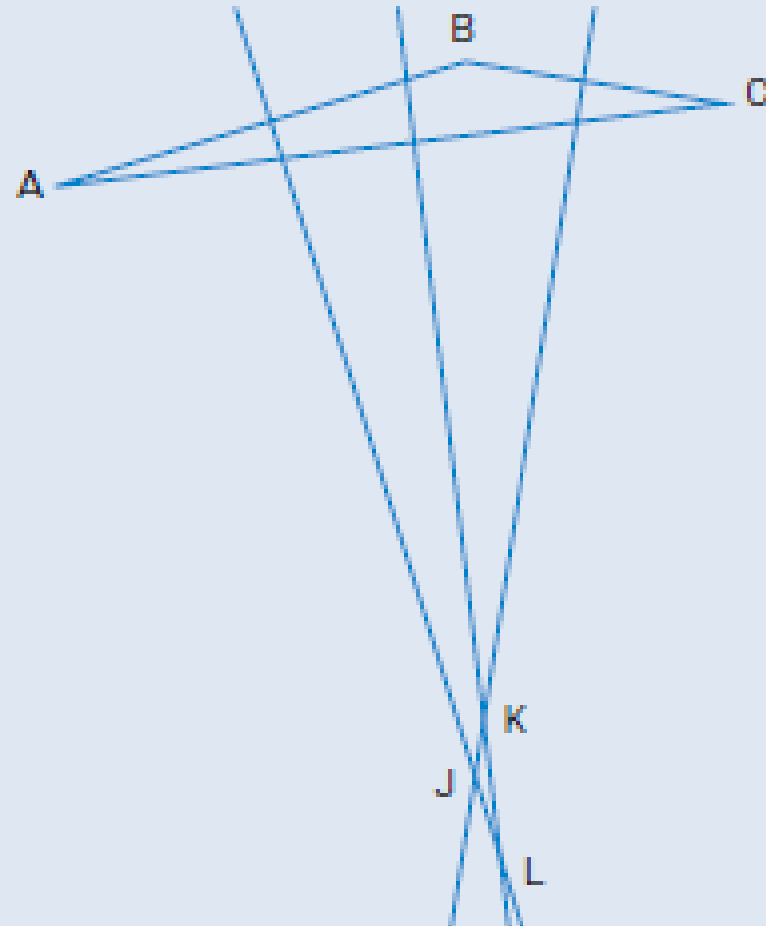


Énoncé

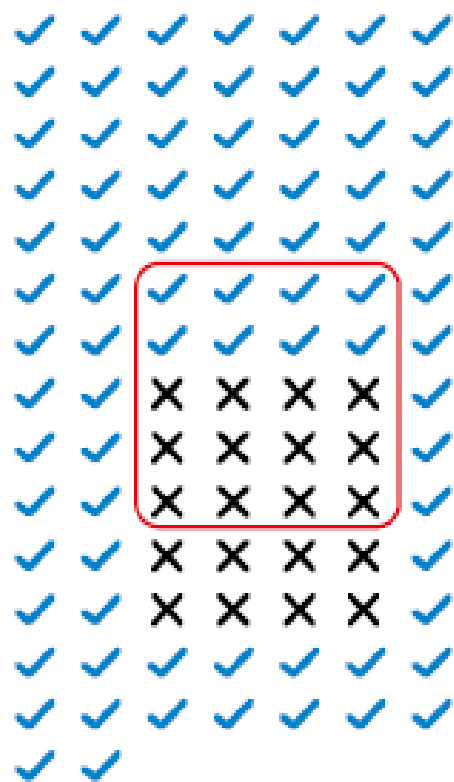
Ce problème peut être proposé dans une classe de 5^e.

Le professeur montre la figure ci-contre, qu'il a réalisée sur une grande feuille, en expliquant « naïvement » qu'il a voulu construire les trois médiatrices des côtés d'un triangle ABC et qu'il a obtenu un petit triangle JKL qui lui paraît étrange.

À chaque élève, il propose trois autres triangles ABC et leur demande pour laquelle de ces trois configurations on obtiendra le triangle JKL le plus petit.



- ✓ vaccinés
- ✗ non vaccinés
- infectés



Ce graphique permet de voir que 8 individus sur les 80 vaccinés sont infectés, soit 10 % des vaccinés, contre 12 individus sur 20 non vaccinés soit 60 % des non vaccinés. Des calculs directs de rapports de proportions permettent aux élèves d'aller au-delà de la conclusion hâtive, car dans ce cas de figure les chances d'être infectés sont 6 fois plus importantes si l'on n'est pas vacciné que si on l'est $\left(\frac{60\%}{40\%} \times \frac{80\%}{20\%}\right)$. Et si 95 % de cette population était vaccinée, l'affirmation « 40 % des personnes infectées sont vaccinées », qui semble pourtant toujours aussi inquiétante, se traduirait en fait par le constat qu'il y a cette fois près de 30 fois plus de risque pour une personne d'être infectée si elle est non vaccinée que si elle est vaccinée $\left(\frac{60\%}{40\%} \times \frac{95\%}{5\%}\right)^{22}$. Il peut aussi être intéressant de travailler avec les élèves l'affirmation que dans une population intégralement vaccinée, 100% des infectés sont vaccinés, ce qui est compatible avec tout niveau d'efficacité du vaccin.

Un capteur relève la concentration d'ozone de l'air toutes les heures à Ville-la-Nouvelle.

1. Le tableau (voir p. suivante) présente ces mesures sur deux jours consécutifs de juillet 2021⁴³.

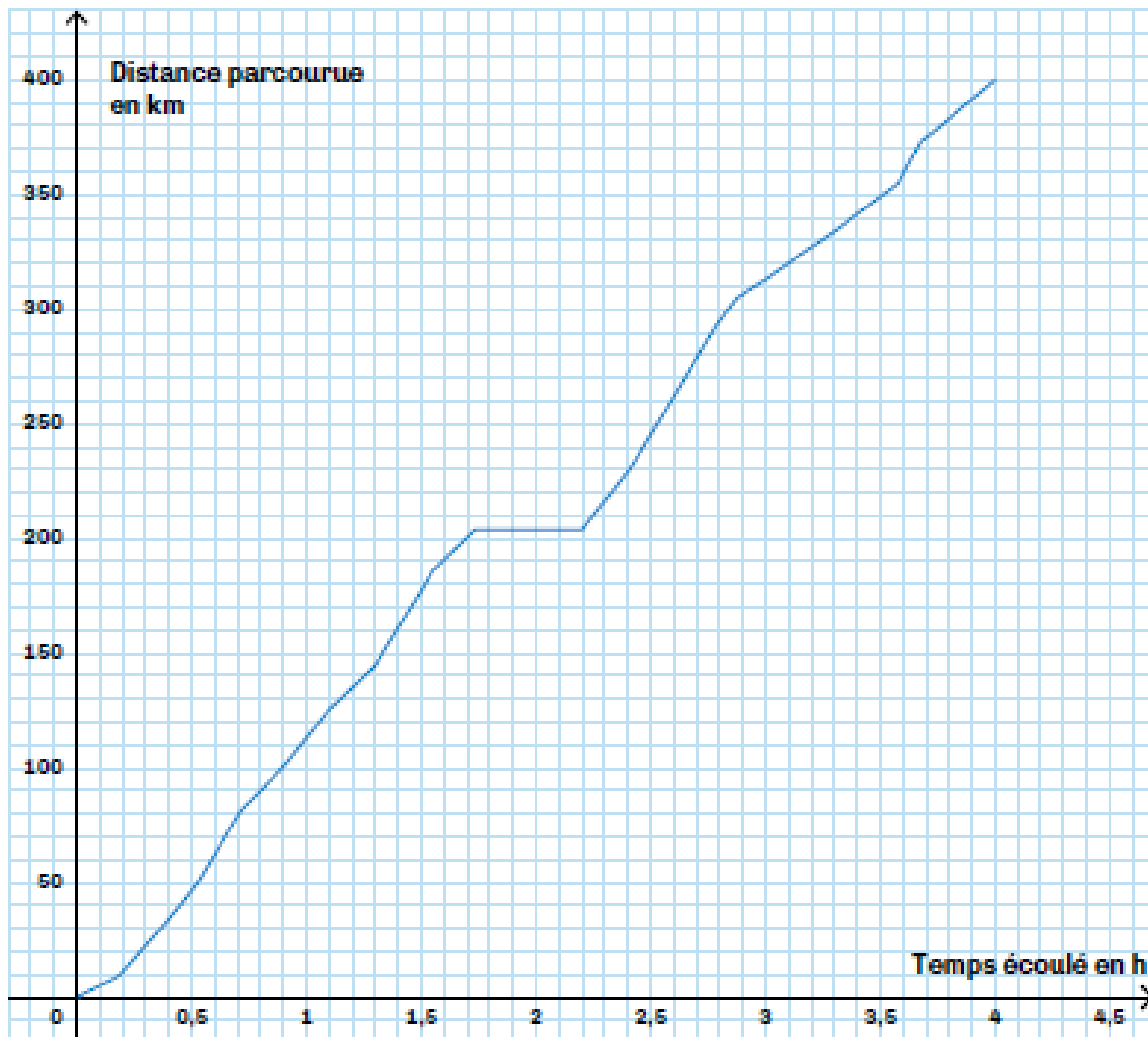
- À l'aide d'un tableur, construire la courbe qui représente la concentration d'ozone dans l'air en fonction du temps pour ces deux jours.
- Déterminer la concentration moyenne pour chacune des journées et comparer ces moyennes. Que pourrait-on en conclure ?
- Un journaliste affirme : « La concentration d'ozone dans l'atmosphère baisse beaucoup à la fin du deuxième jour, c'est donc bon signe : la ville a réussi à améliorer sa qualité de l'air ! » A-t-il raison ? Argumenter.

2. L'ozone a des effets néfastes sur la santé. Selon l'Organisation mondiale pour la santé (OMS), ses effets sont considérés comme acceptables lorsque la concentration est inférieure à $100 \mu\text{g}/\text{m}^3$ en moyenne sur 8 heures consécutives⁴⁴.

- Combien de ces moyennes (appelées moyennes glissantes ou mobiles) peut-on calculer sur ces deux journées ?
- À l'aide du tableur, calculer toutes ces moyennes. L'une de ces journées est-elle une journée à risque selon l'OMS ? Justifier.

Heure	Ozone en $\mu\text{g}/\text{m}^3$	
	Jour 1	Jour 2
0 h	60	60
1 h	58	53
2 h	57	49
3 h	66	44
4 h	65	37
5 h	67	48
6 h	69	50
7 h	70	54
8 h	72	58
9 h	85	68
10 h	110	94
11 h	119	120
12 h	120	130
13 h	102	139
14 h	82	121
15 h	93	102
16 h	85	95
17 h	81	78
18 h	89	64
19 h	84	60
20 h	79	57
21 h	73	52
22 h	69	42
23 h	65	40

Un automobiliste, au volant d'une voiture de sport, a effectué le trajet Lille-Caen d'une distance de 400 km, uniquement en empruntant les autoroutes A1 et A29. Au péage de Dozulé, à l'entrée de Caen, les gendarmes arrêtent l'automobiliste et le verbalise pour vitesse excessive en lui rappelant que la vitesse maximale autorisée sur une autoroute est de 130 km/h. À l'appui de son ticket de péage (document 3), il conteste en précisant qu'il a parcouru 400 km et qu'il est parti de Lille à 12 h 30. Qui a raison ?



Doc. 2 ⁴⁵¹

Société des autoroutes normandes	
REÇU À CONSERVER	
Sortie : DOZULÉ	
TARIF H.T.	3,08 €
T.V.A. 20 %	0,62 €
TARIF T.T.C.	3,70 €
Paiement : CARTE BANCAIRE	
Date : 26/03/2021	16 h 32

Doc. 3

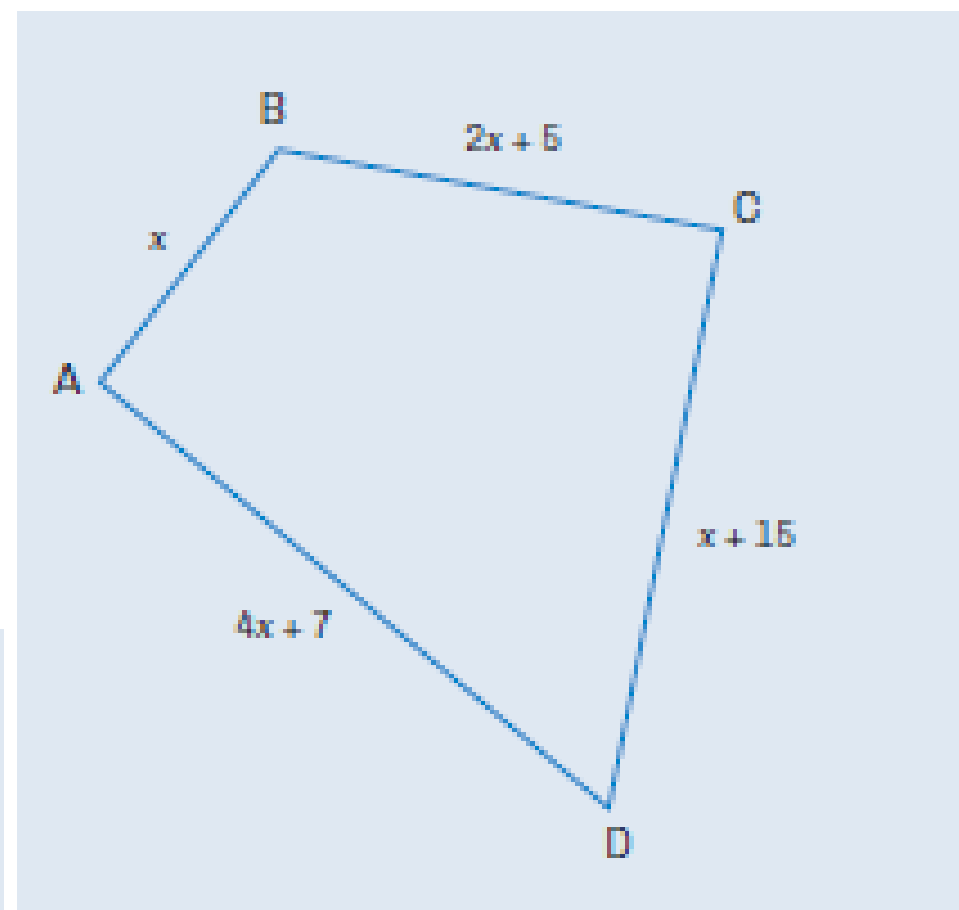
Énoncé

Le périmètre de ce quadrilatère est de 117 cm.

Ranger par ordre croissant les longueurs de ses côtés.

117										
x	x	x	5	x	15	x	x	x	x	7

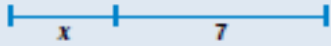
117										
x	x	x	x	x	x	x	x	27		



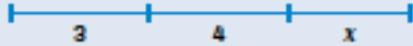
ÉNONCÉ

Quelle situation représente l'expression $3x + 4x$?

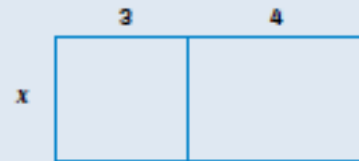
a. La longueur de ce segment :



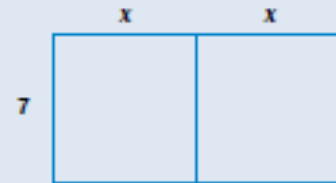
b. La longueur de ce segment :



c. L'aire de cette figure :



d. L'aire de cette figure :



Énoncé

a. Représenter géométriquement l'expression $a^2 + 2(a + 1)$ où a désigne un nombre positif.

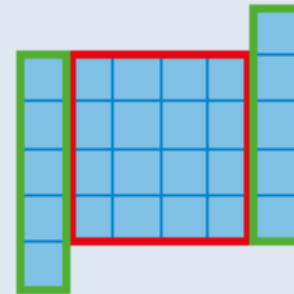
b. Montrer que, quelle que soit la valeur du nombre a positif, les quatre expressions suivantes sont égales :

$$a^2 + 2(a + 1)$$

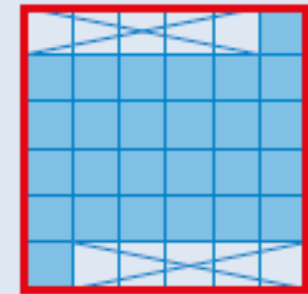
$$(a + 2)^2 - 2(a + 1)$$

$$a(a + 2) + 2$$

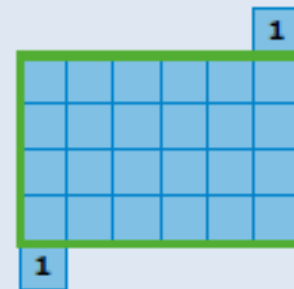
$$a^2 + 2a + 2$$



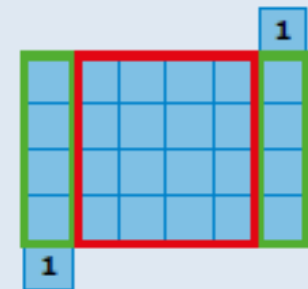
$$a^2 + 2(a + 1)$$



$$(a + 2)^2 - 2(a + 1)$$



$$a(a + 2) + 2$$



$$a^2 + 2a + 2$$

Énoncé

- Dans quel ratio sont les trois angles d'un triangle équilatéral ?
- Quelle est la nature d'un triangle dont les angles sont dans le ratio 1:2:3 ?
- Existe-t-il un triangle isocèle dont les angles sont dans le ratio 2:2:7 ?

Énoncé

Dans les sacs suivants, il y a déjà des billes noires et des billes blanches. Est-il possible d'ajouter un certain nombre (de ton choix) de billes rouges, de façon à satisfaire les indications données en dessous de chaque sac ?



Sac 1 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{5}{12}$.



Sac 2 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{2}{5}$.



Sac 3 : la probabilité d'extraire une bille blanche ou rouge est $\frac{3}{4}$.



Sac 4 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{3}{5}$.

On considère les scripts Scratch ci-dessous¹²¹.

1. Associer chacun des scripts A, B et C ci-dessous à l'une des représentations 3 et 4 (voir p. suivante).

Scripts :

```

when green flag clicked
  when green flag clicked
  set x to 0
  set y to 0
  set rotation to 30
  clear all
  style set position absolute
  create shape * 22
  
```

Bloc d'initialisation

```

when green flag clicked
  when green flag clicked
  initialize
  repeat 3 times
    set stroke color to blue
  repeat 4 times
    move 10 steps
    turn right 90 degrees
    stroke 20 to the color of the stroke
  repeat 10 times
    stroke *
  
```

Script A

```

when green flag clicked
  when green flag clicked
  initialize
  repeat 3 times
    set stroke color to blue
  repeat 4 times
    move 10 steps
    turn right 90 degrees
    stroke 20 to the color of the stroke
  repeat 10 times
    stroke *
  
```

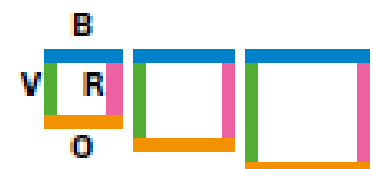
Script B

```

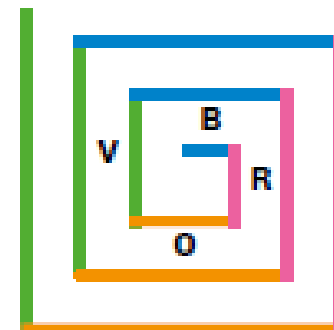
when green flag clicked
  when green flag clicked
  initialize
  repeat 3 times
    set stroke color to blue
  repeat 4 times
    move 10 steps
    turn right 90 degrees
    stroke 20 to the color of the stroke
  clear all
  set x to 0
  set y to 0
  style set position absolute
  
```

Script C

Représentations :



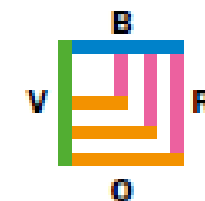
Représentation 1



Représentation 2



Représentation 3



Représentation 4

2. Dans cette question, on s'intéresse au pattern dont le début correspond à la représentation 3, et plus particulièrement à la couleur des segments, dont l'enchaînement est bleu, rose, orange, vert.

- a. Quelle est la couleur du 10^e segment ?
- b. Quelle est la couleur du 20^e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?
- c. Quelle est la couleur du 125^e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?
- d. Trouver une méthode pour déterminer la couleur de n'importe quel segment de ce pattern.

3. On s'intéresse, dans cette question, plus particulièrement au script A et à la longueur des segments en pixels (px).

- a. Quelle est la longueur du 10^e segment ?
- b. Quelle est la longueur du 20^e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?
- c. Quelle est la longueur du 125^e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?
- d. Trouver un moyen de calculer le nombre d'éléments constitutifs du pattern à n'importe quel rang.