ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Plan math collège
La résolution de problèmes

Atelier : le modèle en barres

MAI 2022

ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Déroulé

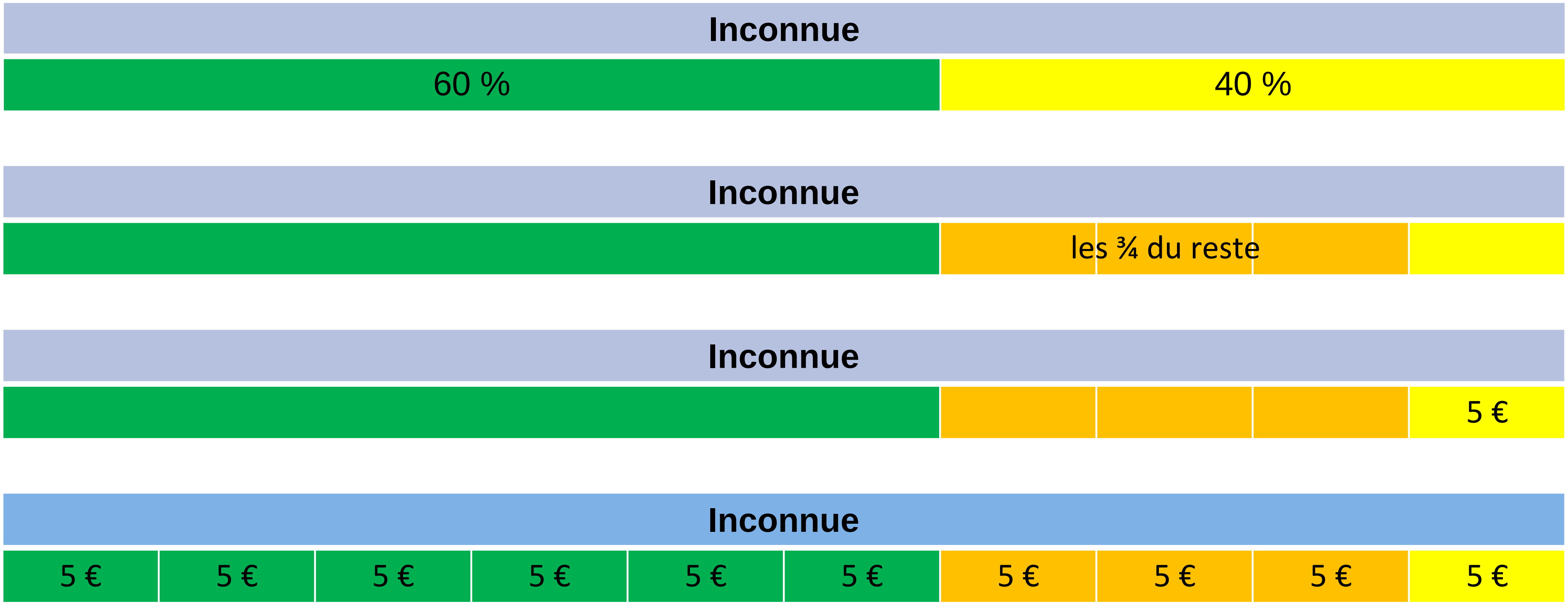
- Introduction, définition
- Point d'histoire, étude de cas
- Travail en sous-atelier
- Plénière de restitution

Un exemple

Alice dépense les 60 % de son argent de poche pour acheter un livre. Elle donne les trois quarts de ce qui lui reste pour rembourser son frère. Maintenant, elle n'a plus que 5 €.

Quelle était sa fortune au départ ?

Résolution avec la représentation du diagramme en barre :



Alice avait au départ : 10 x 5 € = 50 €

Productions d'élèves de 6ème:

$5 = \frac{1}{4}$ de ce qu'il lui reste donc $5 \times 4 =$ l'argent qui lui restait avant de rembourser son frère,

$20€ = 40\%$ de son argent de base $\quad +40\% = 40€ = 80\%$

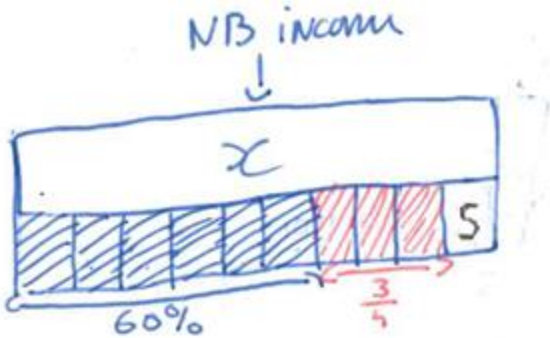
$20 \div 2 = 10€ = 20\%$

$40 + 10 = 50€ = 100\%$

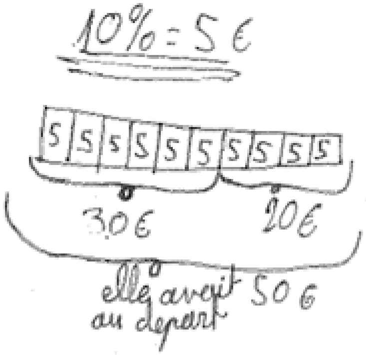
Sa "fortune" de départ est de 50€.

Productions d’élèves de 6ème:

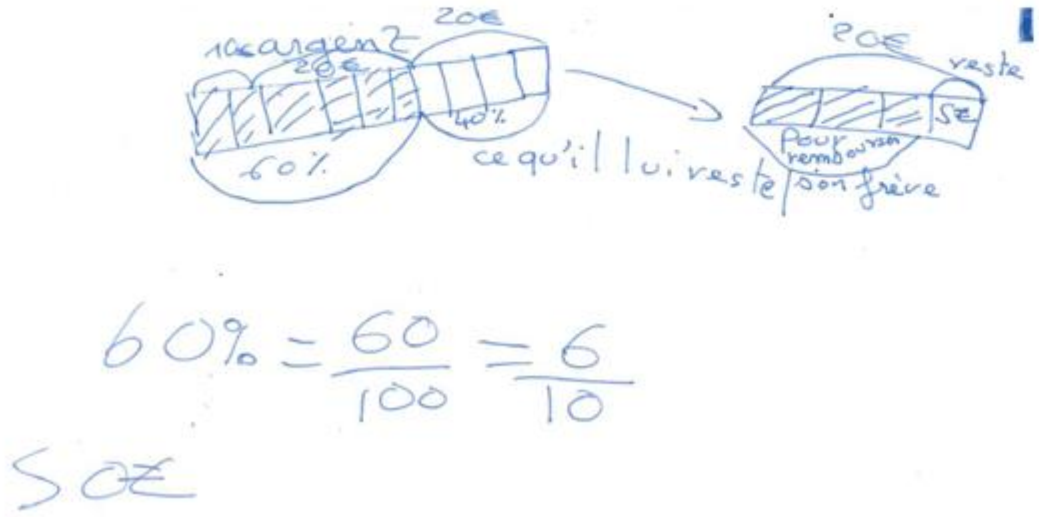
Une bonne représentation mais l’élève n’arrive pas ensuite à répondre à la question.

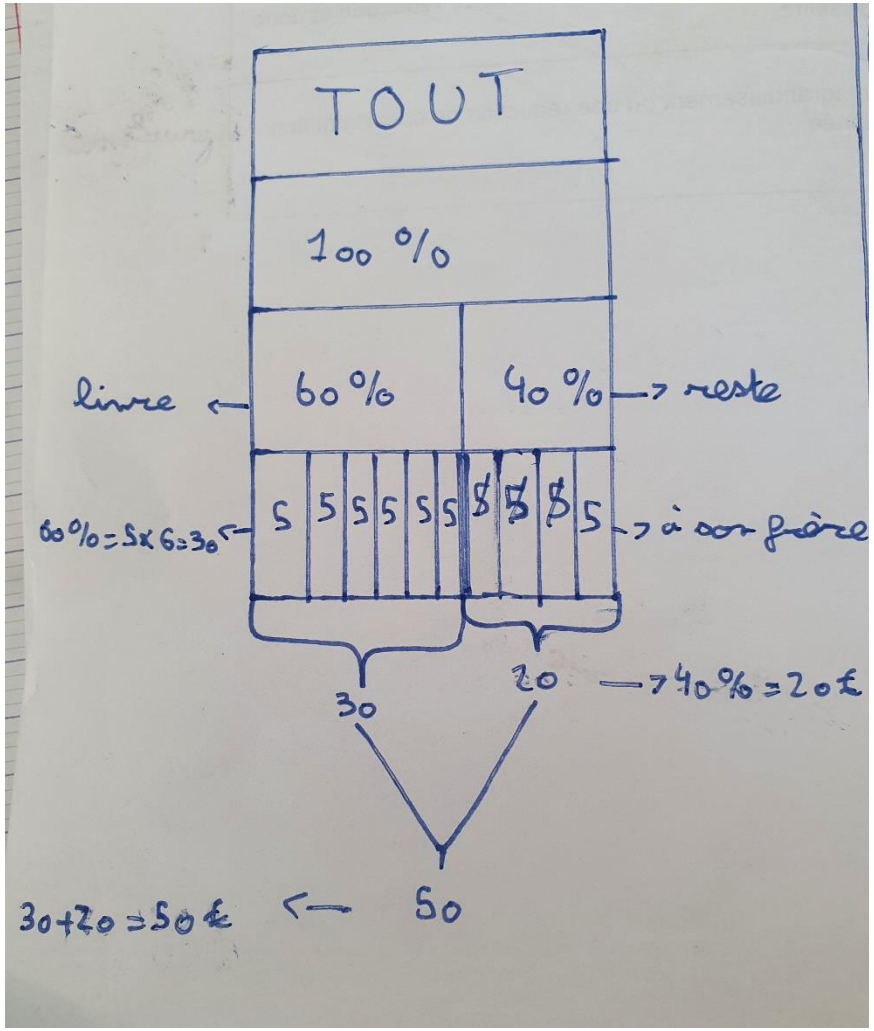


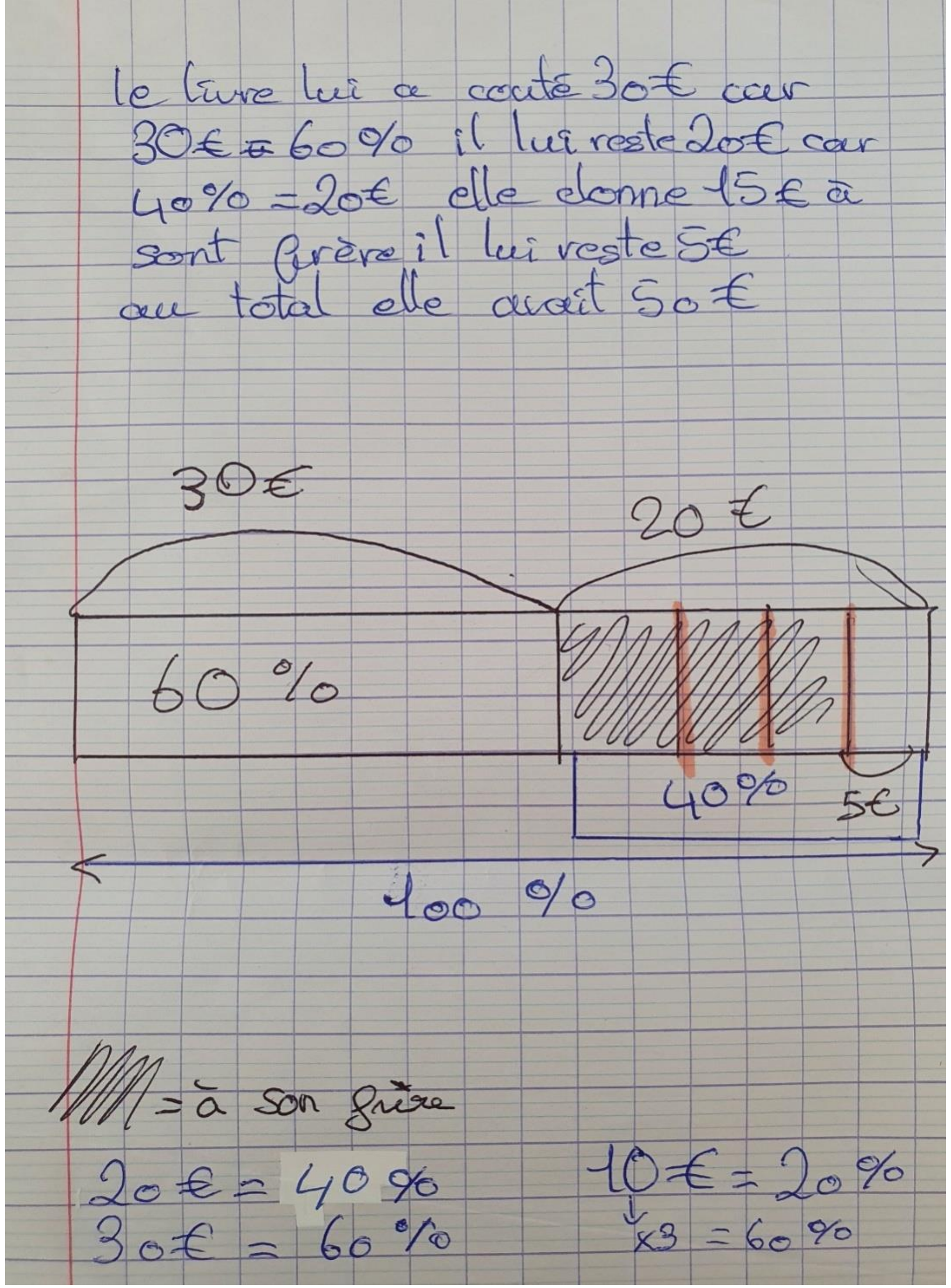
Un bon diagramme en barre



Un autre schéma




TOUT
100 %
livre
60 %
40 %
reste
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
60%=5x6=30
à son frère
30
20
40%=20€
50
30+20=50€


le livre lui a couté 30€ car
30€ = 60 % il lui reste 20€ car
40% = 20€ elle donne 15€ à
sont frère il lui reste 5€
au total elle avait 50€
30€
20 €
60 %
40%
5€
100 %
= à son frère
20€ = 40 %
30€ = 60 %
10€ = 20 %
x3 = 60 %

Définition

Le modèle en barre est un outil de représentation qui met en évidence **les relations arithmétiques entre les données de l'énoncé et la grandeur « longueur** ».

Son élaboration par l'élève se déroule pendant la phase de recherche.

(C'est un outil vu en primaire qui est transitoire, qui aide les élèves en difficulté mais qui vise à être abandonné pour le calcul algébrique et c'est un outil qui a ses limites)

Objectifs de l'atelier

Appréhender :

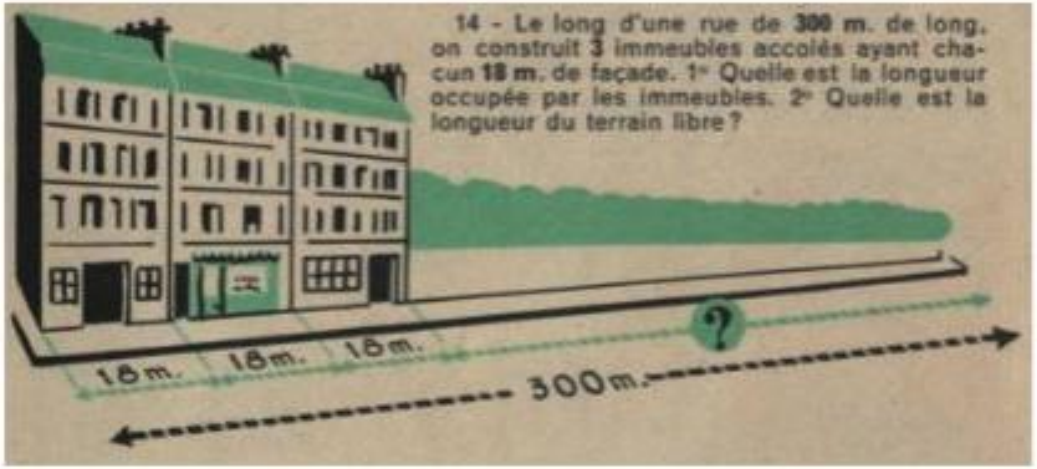
→ Comment le modèle en barres peut constituer une aide pour certains élèves à résoudre certains types de problèmes rencontrés au collège ?

→ Quels sont les intérêts et limites de ce modèle ?

→ Quels sont les types de problèmes qui relèvent de ce modèle ?

Un peu d'histoire

- Modèle en barres déjà présent avant les mathématiques modernes



- Extrait de la thèse de M. Priolet (2008)

54e LEÇON

GAIN — DÉPENSE — ÉCONOMIE

203. PROBLÈME I. — **Michel gagne 15 000f par an et dépense 12 000f. Combien économise-t-il par an ?**

Michel économise ce qu'il gagne moins ce qu'il dépense, soit 15 000f — 12 000f = 3 000f.

204. PROBLÈME II. — **Michel gagne 15 000f par an et économise 3 000f. Combien dépense-t-il ?**

Michel dépense ce qu'il gagne moins ce qu'il économise, soit 15 000f — 3 000f = 12 000f.

205. PROBLÈME III. — **Michel dépense 12 000f par an et économise 3 000f. Combien gagne-t-il ?**

Michel gagne ce qu'il dépense plus ce qu'il économise, soit 12 000f + 3 000f = 15 000f.

206. D'une manière générale (fig. 72), on a :

Economie = gain — dépense ;
Dépense = gain — économie ;
Gain = dépense + économie.

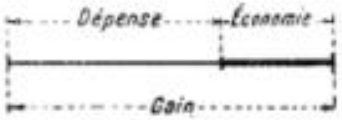


FIG. 72.

(Boucheny, p. 125)

Un peu d'histoire

Un modèle présent dès les années 1930

EXERCICES D'INTELLIGENCE

313. Complétez et terminez le problème suivant : Paul avait ... billes. Il en a gagné ... ce matin et ... ce soir. Combien a-t-il de billes maintenant ? — 314. Imaginez un problème d'après les indications suivantes : 7m + 12m + 5m. — 315. Des écoliers ont à résoudre un problème dans lequel on trouve les nombres suivants : 710f, 7 ouvriers et 2 jours. Lucien additionne ces nombres. Sans connaître ce problème, feriez-vous comme Lucien ? — 316. Pourquoi ? — 317. Rémy fait du commerce. Il avait acheté une toupie en buis au prix de 80 centimes. Il la revend à son camarade René 10 centimes de plus. Combien Rémy a-t-il retiré de la vente de la toupie ? — 318. Indiquez dans ce problème : 1° *le prix d'achat*; 2° *le bénéfice*; 3° *le prix de vente*. — 319. Complétez et terminez le problème suivant : Un marchand reçoit une belle poupée qui lui coûte .....f. Il veut, en la revendant, faire un bénéfice de .....f. Quel sera le prix de vente de cette poupée ? — 320. *Comment avez-vous calculé le prix de vente dans ces deux derniers problèmes ?*

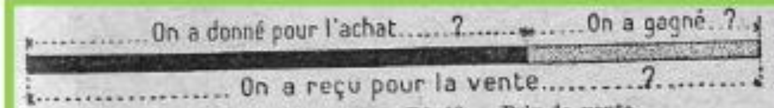


FIG. 33 a. — Prix d'achat. Bénéfice. Prix de vente.

RESTE DE LA DIVISION

146. — *Problème.* — *Combien fera-t-on de robes de dame avec 14m de soie, s'il faut 3m de soie pour faire une robe?*

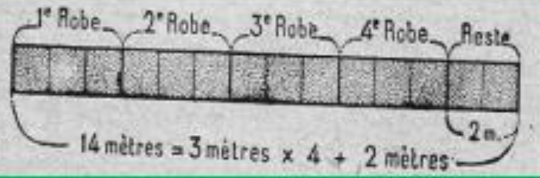


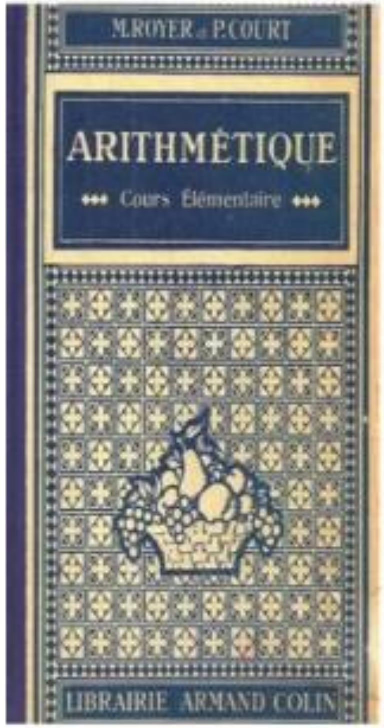
FIG. 68. — Division avec reste.

On fera 4 robes avec 14m de soie, car 4 fois 3m font 12m et il *restera* 2m (fig. 68). On ne peut pas faire 5 robes, car il faudrait 5 fois 3m ou 15m, c'est-à-dire 1m de soie de plus.

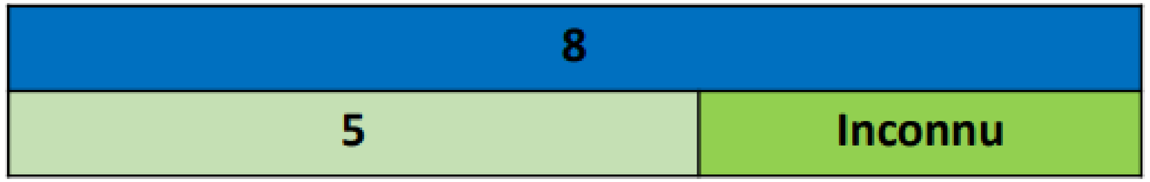
On dit : En 14 combien de fois 3? 4 fois, *reste* 2.

On écrit : 14 : 3 = 4, *reste* 2.

La division donne un reste quand le diviseur n'est pas contenu un nombre exact de fois dans le dividende.



Parmi les problèmes ci-dessous, lesquels peuvent être résolus avec le modèle suivant :



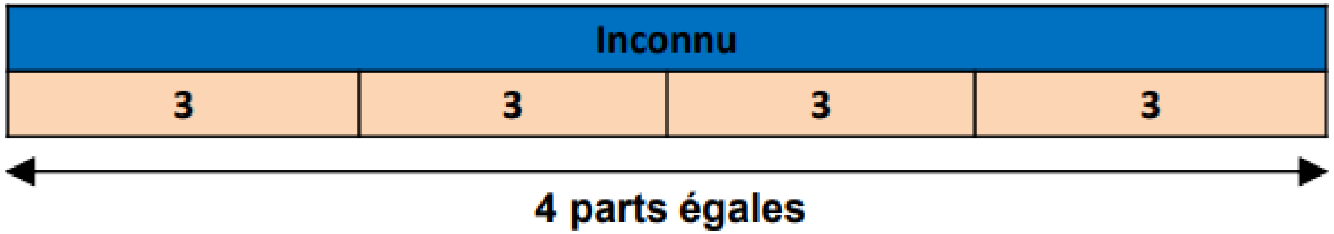
- J’ai 8 billes en tout, des billes rouges et des billes bleues. Cinq billes sont rouges. Combien de billes sont bleues ?

- J’ai 8 billes, je perds 5 billes. Combien ai-je de billes maintenant ?

- J’ai 8 billes, mon ami en a 5 de moins. Combien de billes a-t-il ?

- J’ai gagné 8 billes puis j’ai perdu 5 billes. Combien ai-je gagné de billes finalement ?

Même question avec le modèle suivant et les 4 énoncés ci-dessous:



- J'ai 4 sacs de 3 billes, combien ai-je de billes ?

- Je souhaite partager avec mon petit frère les billes gagnées aujourd'hui. J'en garde 3 et j'en donne le triple à mon petit frère. Combien de billes avais-je gagné aujourd'hui ?

- Je partage mes billes avec mon frère, j'en garde $\frac{1}{4}$ et je donne le reste. J'ai maintenant 3 billes. Combien en avais-je en tout ?

- J'ai 3 billes, mon frère autant et ma sœur en a le double. Combien avons-nous de billes en tout ?

Les situations rencontrées relèvent des deux modèles suivants :

Modèle additif

Valeur totale	
Valeur 1	Valeur 2

Modèle multiplicatif

Valeur totale		
Valeur d’une part	…	Valeur d’une part

Nombre de parts égales

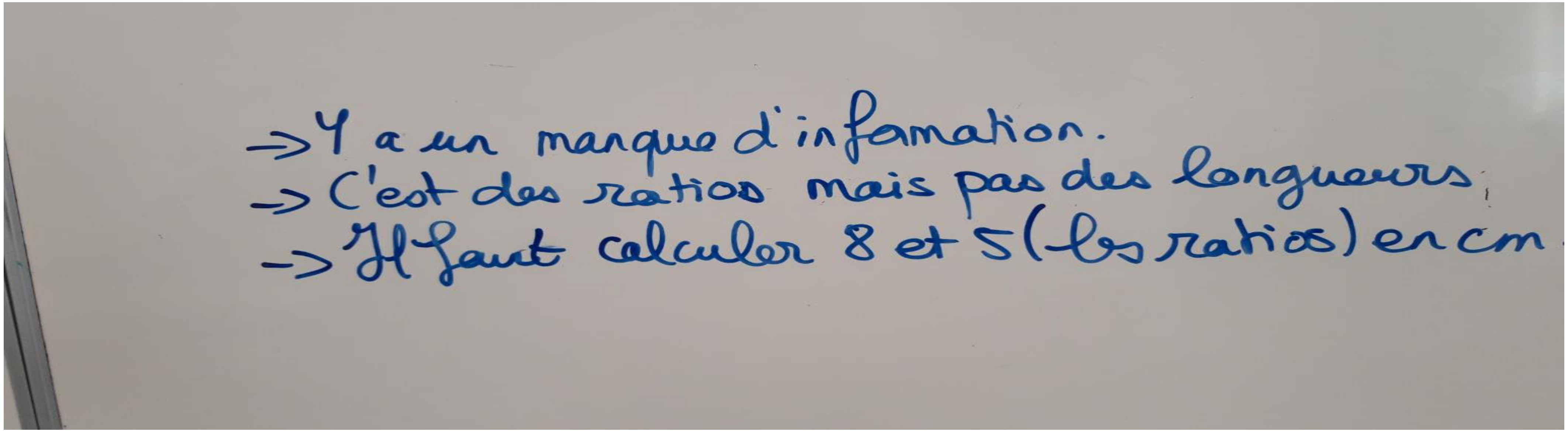
Un autre problème :

Un père et son fils Kevin ont leur taille dans le ratio 8 pour 5 (noté 8:5). La différence entre leurs tailles respectives est de 66 cm.

Quelle est la taille du père ?

- **Quelles sont les difficultés rencontrées par nos élèves pour résoudre ce problème ?**

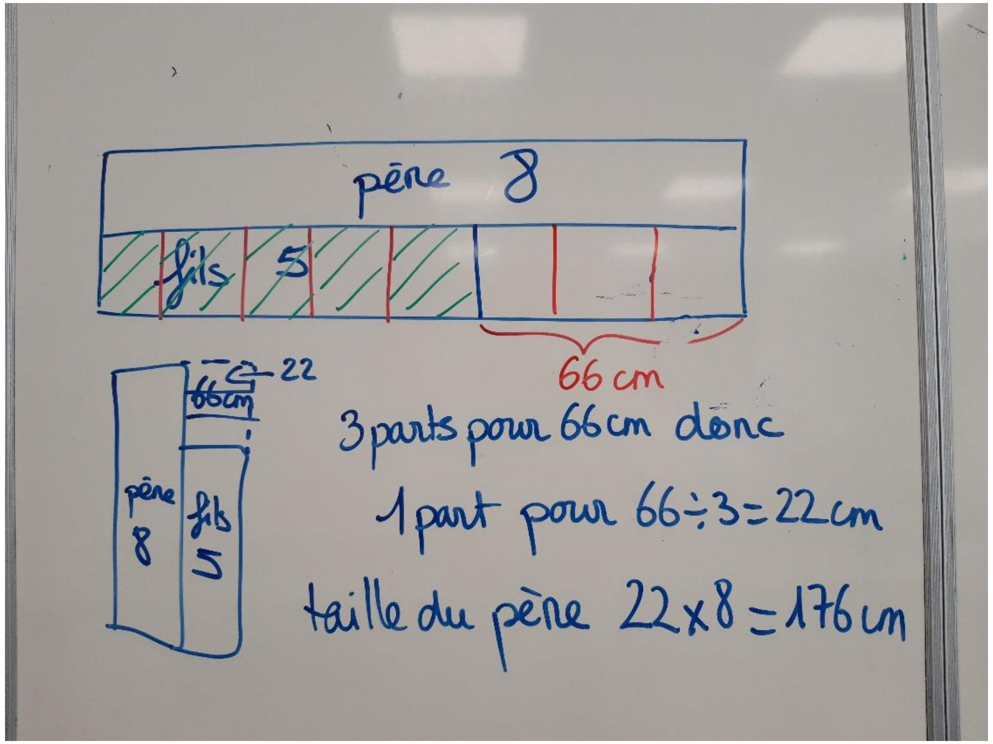
Retour d'expérience :



Un autre problème :

"Manipuler, verbaliser, abstraire" : les ratios, une étape vers l'algèbre, entre autres ...

Retour d'expérience :



Le matériel :

- Cubes emboîtables

- Réglettes Cuisenaire

À vous !

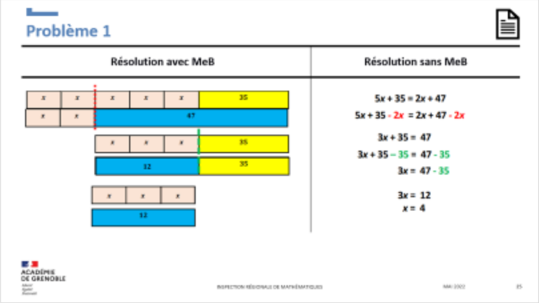
- ❑ Identifier pour chaque exercice si le MeB peut être mis en œuvre ;
- ❑ Comparer les démarches avec et sans le recours au MeB ;
- ❑ Identifier les intérêts/atouts du MeB et ses inconvénients/limites.

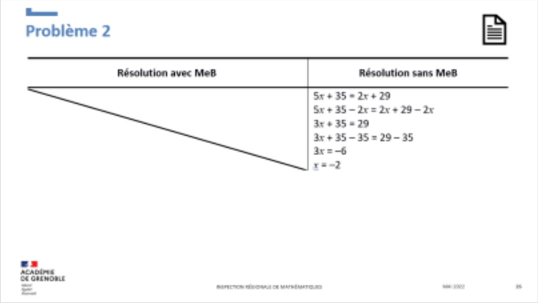
Vous pouvez pour cela prendre appui sur la fiche proposée d'aire à la restitution.

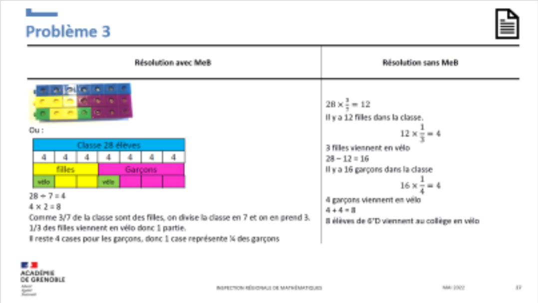
Restitution

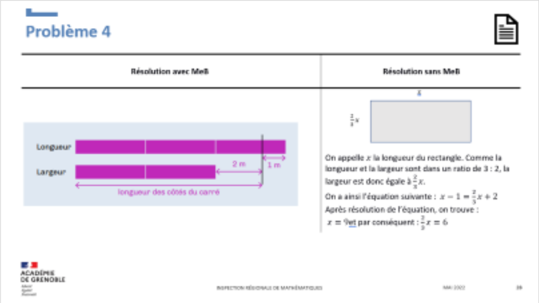
Intérêts/atouts MeB

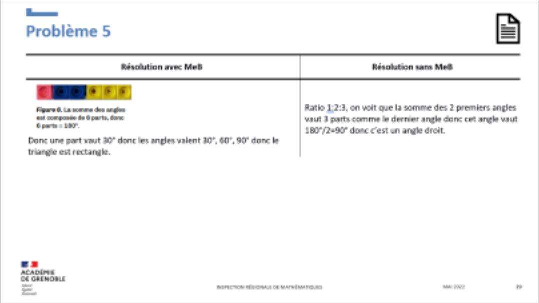
Inconvénients/limites MeB

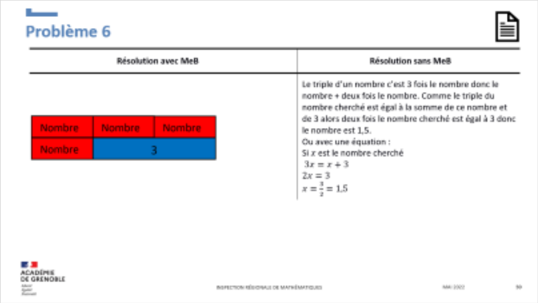


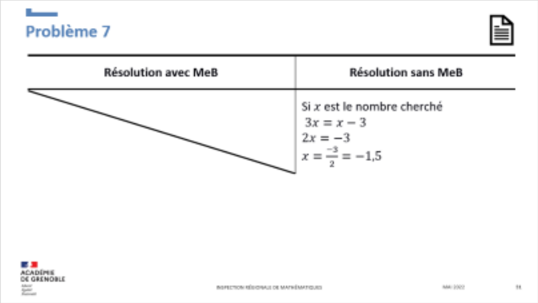


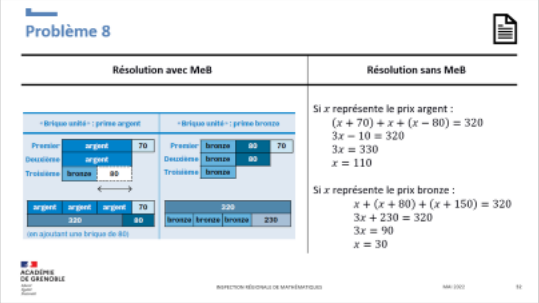












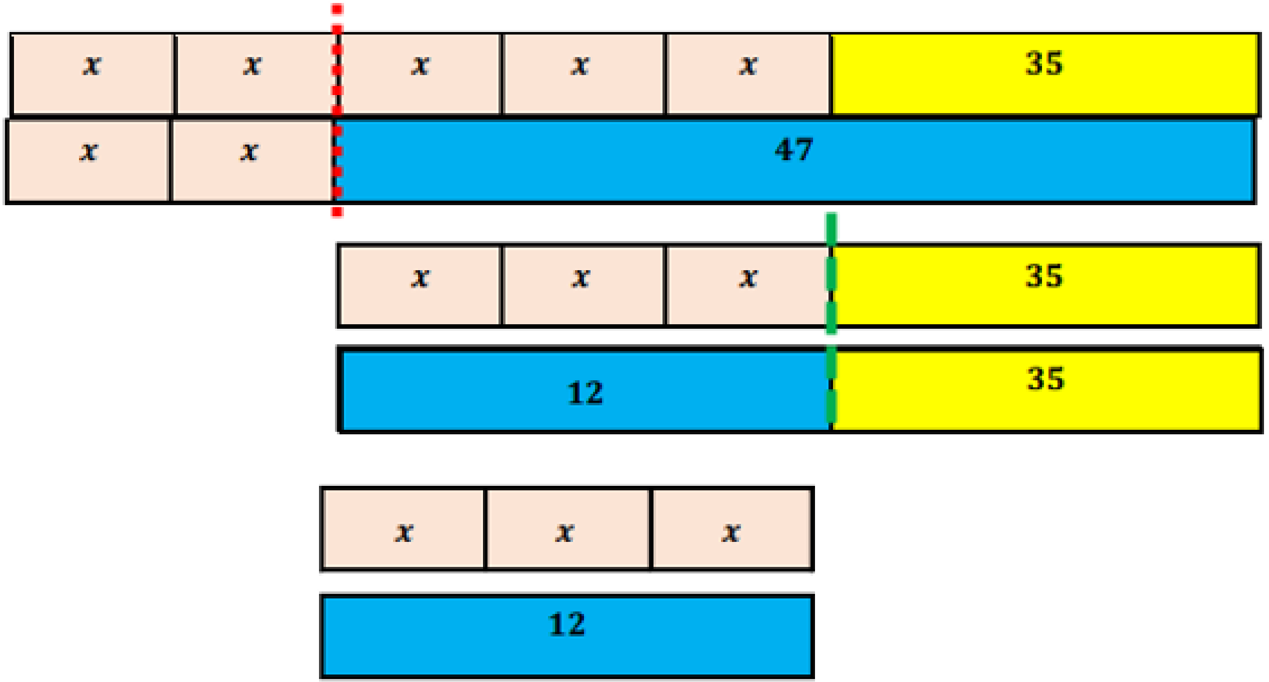
Conclusion : intérêts du modèle en barres

- **Types de problèmes** pouvant être résolus avec le modèle :
  - → problèmes avec des fractions, ratios et pourcentages
  - → Problèmes algébriques (avec des limites)
- **Intérêts** de les résoudre avec ce modèle :
  - → **Continuum didactique du cycle 1 au cycle 4**
  - → Visuel: compréhension et discussion
  - → Pré-algèbre : structure du diagramme en barre analogue à la structure algébrique du problème
  - → Matériel de manipulation: lien entre le visuel et le symbolique
  - → Renforce le sens des opérations avec notamment les deux modèles additif et un multiplicatif (permet de travailler le lien multiplication/division)
  - → Problèmes complexes : identification des différentes étapes de résolution
  - → Travail de questionnement autour de l'énoncé (allers/retours entre l'énoncé et le modèle)

ACADÉMIE
DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Problème 1

Résolution avec MeB	Résolution sans MeB



$$5x + 35 = 2x + 47$$

$$5x + 35 - 2x = 2x + 47 - 2x$$

$$3x + 35 = 47$$

$$3x + 35 - 35 = 47 - 35$$

$$3x = 47 - 35$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

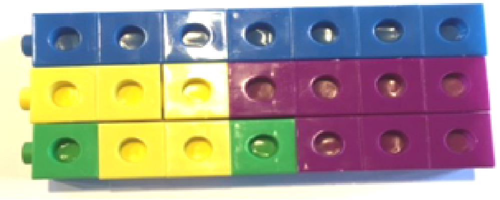
Problème 2

Résolution avec MeB	Résolution sans MeB
	$5x + 35 = 2x + 29$ $5x + 35 - 2x = 2x + 29 - 2x$ $3x + 35 = 29$ $3x + 35 - 35 = 29 - 35$ $3x = -6$ $x = -2$

ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Problème 3

Résolution avec MeB



Ou :

28 ÷ 7 = 4

4 × 2 = 8

Comme 3/7 de la classe sont des filles, on divise la classe en 7 et on en prend 3.

1/3 des filles viennent en vélo donc 1 partie.

Il reste 4 cases pour les garçons, donc 1 case représente ¼ des garçons

Résolution sans MeB

$28 \times \frac{3}{7} = 12$

Il y a 12 filles dans la classe.

$$12 \times \frac{1}{3} = 4$$

3 filles viennent en vélo

28 – 12 = 16

Il y a 16 garçons dans la classe

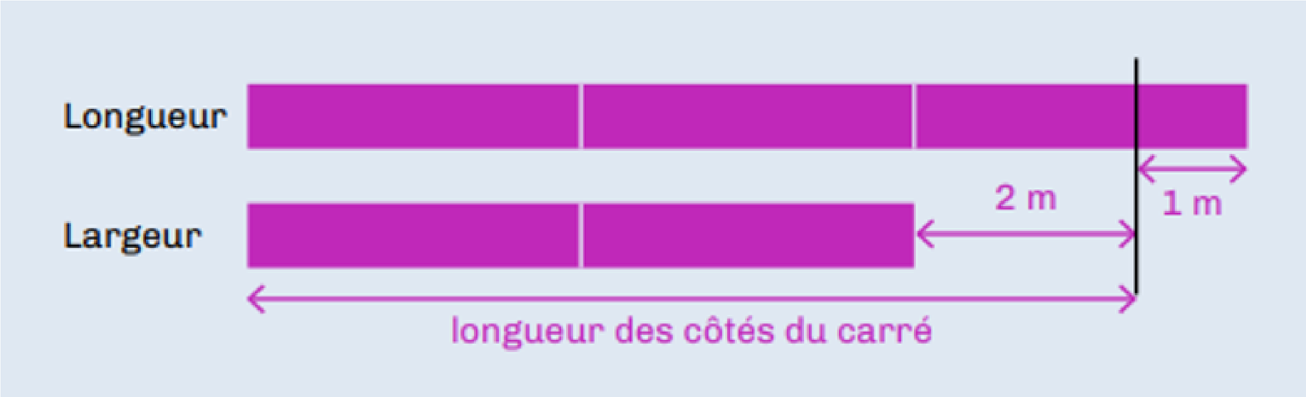
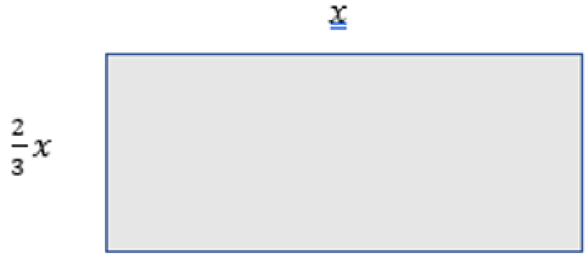
$$16 \times \frac{1}{4} = 4$$

4 garçons viennent en vélo

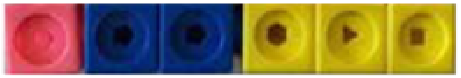
4 + 4 = 8

8 élèves de 6°D viennent au collège en vélo

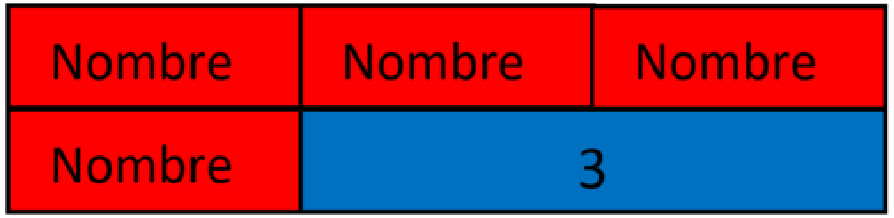
Problème 4

Résolution avec MeB	Résolution sans MeB
	 On appelle x la longueur du rectangle. Comme la longueur et la largeur sont dans un ratio de 3 : 2, la largeur est donc égale à $\frac{2}{3}x$. On a ainsi l'équation suivante : $x - 1 = \frac{2}{3}x + 2$ Après résolution de l'équation, on trouve : $x = 9$et par conséquent : $\frac{2}{3}x = 6$

Problème 5

Résolution avec MeB	Résolution sans MeB
 ***Figure 6.*** **La somme des angles est composée de 6 parts, donc 6 parts = 180°.** Donc une part vaut 30° donc les angles valent 30°, 60°, 90° donc le triangle est rectangle.	Ratio 1:2:3, on voit que la somme des 2 premiers angles vaut 3 parts comme le dernier angle donc cet angle vaut 180°/2=90° donc c'est un angle droit.

Problème 6

Résolution avec MeB	Résolution sans MeB
	Le triple d'un nombre c'est 3 fois le nombre donc le nombre + deux fois le nombre. Comme le triple du nombre cherché est égal à la somme de ce nombre et de 3 alors deux fois le nombre cherché est égal à 3 donc le nombre est 1,5. Ou avec une équation : Si x est le nombre cherché $3x = x + 3$ $2x = 3$ $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$

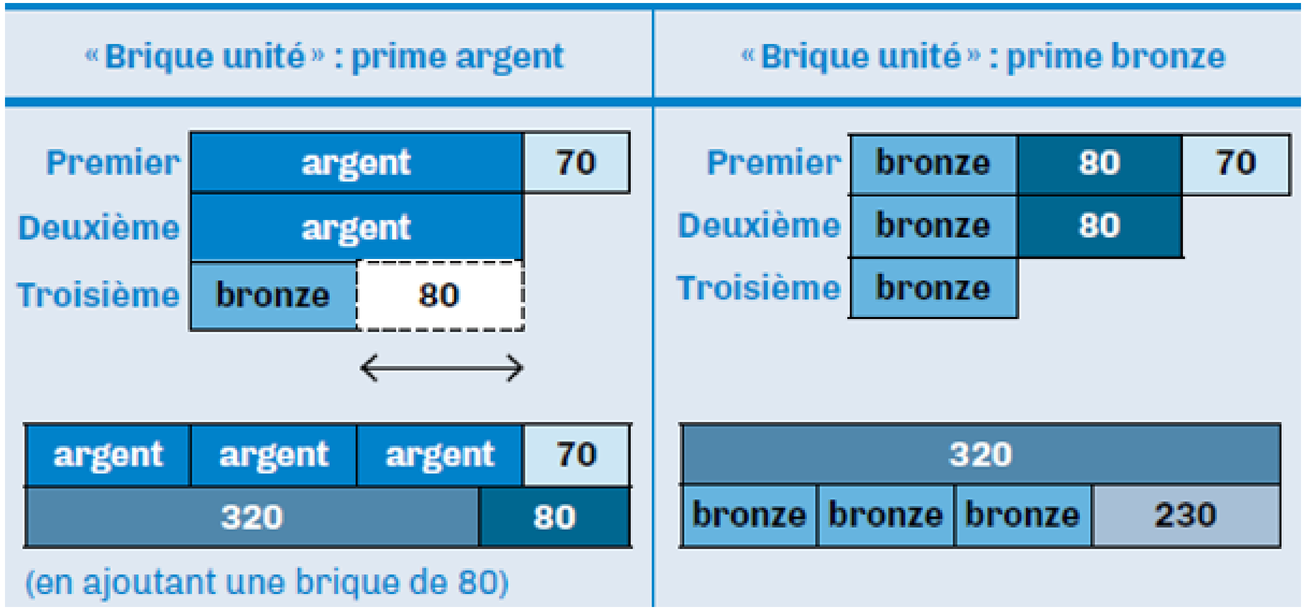
ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Problème 7

Résolution avec MeB	Résolution sans MeB
	Si x est le nombre cherché $3x = x - 3$ $2x = -3$ $x = \frac{-3}{2} = -1{,}5$

Problème 8

Résolution avec MeB	Résolution sans MeB



Si x représente le prix argent :

$$(x + 70) + x + (x - 80) = 320$$
$$3x - 10 = 320$$
$$3x = 330$$
$$x = 110$$

Si x représente le prix bronze :

$$x + (x + 80) + (x + 150) = 320$$
$$3x + 230 = 320$$
$$3x = 90$$
$$x = 30$$

Enoncé problème 1

Léa et Ali ont choisi un nombre. Léa le multiplie par 5 et ajoute 35. Ali le multiplie par 2 et ajoute 47. Ils trouvent le même nombre à la fin. A quel nombre avaient-ils pensé ?

Enoncé problème 2

Le même que le précédent dans lequel on remplace 47 par 29.

Enoncé problème 3

Il y a 28 élèves en 6ème D. Les 3/7 sont des filles. 1/3 des filles et 1/4 des garçons viennent au collège en vélo.

Combien d'élèves de la 6ème D viennent au collège en vélo ?

Enoncé problème 4

Un rectangle a une longueur et une largeur dans le ratio 3:2. Si je diminue la longueur de 1 m et si j'augmente la largeur de 2 m, j'obtiens un carré. Quelle est son aire ?

Enoncé problème 5

Quelle est la nature du triangle dont les angles sont dans le ratio 1 : 2 : 3 ?

Enoncé problème 6

Je suis un nombre.

Si on m'ajoute 3 ou si on me multiplie par 3, on trouve le même résultat. Qui suis-je ?

Enoncé problème 7

Le triple d’un nombre est égal à la différence de ce nombre et de 3. Quel est ce nombre ?

Enoncé problème 8

Pour la fête d'un village, on organise une course cycliste. Une prime totale de 320 € sera répartie entre les trois premiers coureurs. Le premier touchera la prime or, le second, la prime argent et le troisième la prime bronze. La prime or s'élève à 70 € de plus que la prime argent, et la prime bronze s'élève à 80 € de moins que la prime argent. Déterminer la prime de chacun des trois premiers coureurs.