ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

JDI - Plan mathématiques collège

Atelier : Résolution de problèmes/stratégies

Présentation du chapitre 7 du guide

Résolution de problèmes : stratégies

- **De quels problèmes parle-t-on ?**

Un rectangle de longueur 10 cm et de largeur 6 cm a-t-il une plus grande aire qu'un carré de diagonale 10 cm ?

- **Comment développer chez les élèves la capacité à résoudre de tels problèmes lorsque toute autonomie leur est confiée dans le choix de la démarche ?**

- **Des constats :**

  - La maitrise par les élèves des notions mathématiques (savoirs et savoir-faire) mobilisées dans un problème ne saurait suffire.
    [Il faut également que les élèves : prennent des initiatives ; imaginent des pistes de solution ; s’engagent sans s’égarer ; procèdent par analogie ou identifier un modèle…]

  - La seule confrontation des élèves à la résolution de problèmes, même régulière, en classe ou hors la classe ne saurait suffire à garantir leur réussite.

Présentation des modalités retenues

[Chapitre 7 du guide propose des mises en œuvre, en classe, d'un enseignement de la résolution de problème dont l'objectif est de faciliter la compréhension des élèves et ainsi les rassurer ; leur permettre de gagner en confiance et favoriser ensuite leur engagement sur des tâches similaires]

→ **Une stratégie d'apprentissage fondée sur l'explicitation.**

❑ Cette approche de l'explicitation requiert un changement de pratique relativement minime par rapport aux usages courants.

Il s'agit :

- **d'installer des temps dédiés à la résolution de « classes de problèmes »**
- **de disposer de procédures automatisées.**

ACADÉMIE
DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Première modalité : des temps dédiés à la résolution de « classes de problèmes »

[Exemple : Les problèmes se ramenant à une équation]

Première modalité : des temps dédiés à la résolution de « classes de problèmes »

Un temps d’apprentissage :

- **suffisamment long,** sur quelques séances consécutives.

  [Il s’agit d’un apprentissage groupé sur quelques séances qui pourra être répété à chaque rencontre d’une nouvelle classe de problèmes, tout au long du cursus de l’élève]

- **clairement identifié** comme tel par l’enseignant et annoncé aux élèves.

- prenant appui sur **l’explicitation** : des notions et compétences mathématiques mobilisées, des procédures suivies, des stratégies transférables…

Dont l’objectif est de permettre à l’élève de mieux structurer sa pensée et gagner en autonomie.

Première modalité : des temps dédiés à la résolution de « classes de problèmes »

- Consacré à une classe de problème.

- L’accomplissement d’une activité de résolution de problèmes est rendu explicite aux élèves en l’exécutant devant eux, en expliquant à voix haute le raisonnement suivi, en les associant à la verbalisation des étapes et des stratégies utilisées.

  [rendre explicite avec les élèves les ressemblances et les différences entre plusieurs situations]

- La compréhension des élèves est testée en les faisant régulièrement reformuler.

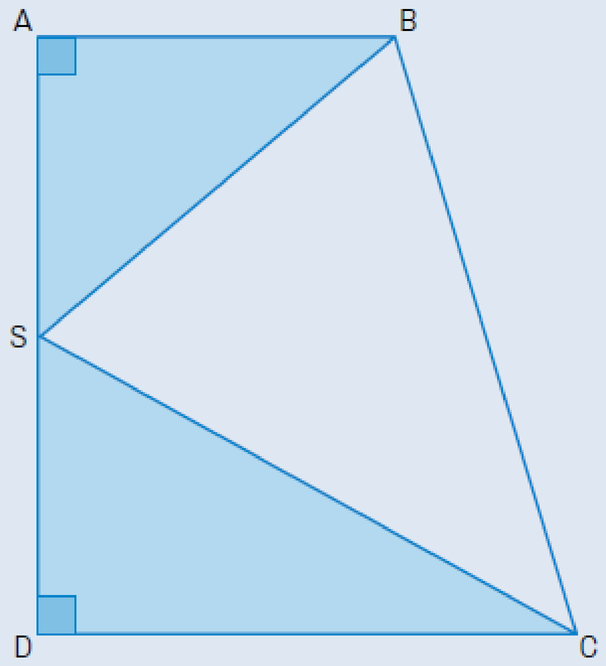
- Les élèves gardent une trace écrite de cette explicitation à laquelle ils pourront se référer à l’occasion de nouvelles résolutions.

ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté Égalité Fraternité

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e autour des problèmes se modélisant par une équation

PROBLÈME CIBLE

Le trapèze ABCD ci-dessous est un trapèze rectangle tel que AB = 60 cm, AD = 100 cm et DC = 80 cm.
S est un point du segment [AD].
Où placer le point S pour que les aires des triangles ABS et DSC soient égales ?



ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Stratégie d'enseignement à la résolution de problème

Devoir hors la classe

Séance 1

Séance 2

Séance 3

Vise à rendre l'élève en mesure d'identifier les dimensions pertinentes sur le plan mathématique pour les situations relevant de cette famille de problèmes

Temps d'apprentissage

Evaluation formative

le problème cible est confié aux élèves en pleine autonomie

Séance 4

Séance 5 (?)

Différenciation

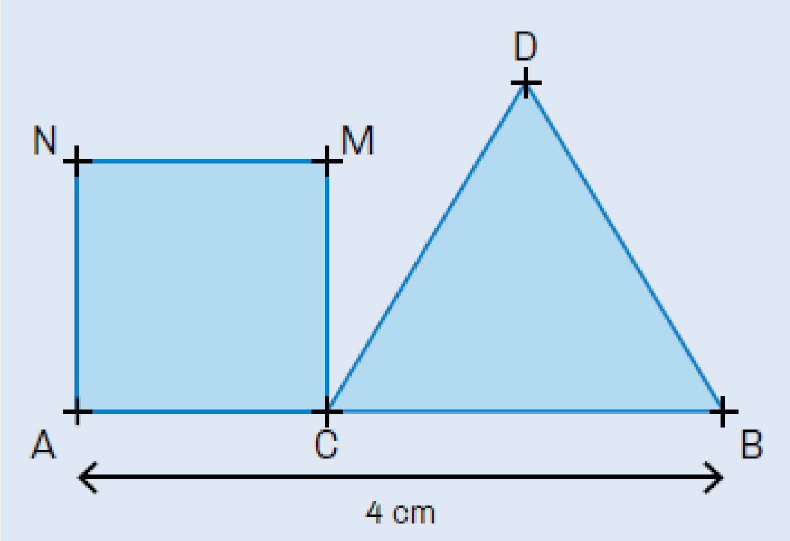
Remédiation ou approfondissement en autonomie

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

Séance 1

PROBLÈME 1

Le point C appartient au segment [AB].
La longueur du segment [AB] vaut 4 cm.
Le carré ACMN et le triangle équilatéral BDC sont dessinés du même côté du segment [AB].
Où placer le point C pour que le périmètre du carré soit égal à celui du triangle ?



Phase individuelle de 5 minutes d'appropriation

Identification des obstacles et de la manière d'y remédier, mise en évidence des étapes du travail

* Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

Poursuite de la résolution (individuellement ou collectivement)

* Ne pas devancer la réflexion des élèves

Synthèse : correction du problème et explicitation

* Trace écrite explicite

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

On pose $x = AC$ || recours à une lettre

raisonnement

Périmètre carré : $x \times 4 = 4x$

Longueur CB ? $CB = 4 - x$

Périmètre triangle : $(4-x)\times 3$

$= 3\times(4-x)$

Contrainte : $P_{ACMN} = P_{CBD}$

$\boxed{3\times(4-x) = 4x}$ ← équation

calculs

$12 - 3x = 4x$

$-7x = -12$

$x = \frac{-12}{-7} = \frac{12}{7}$

je la résous

Le point C se situe sur [AB] tel que $AC = \frac{12}{7}$

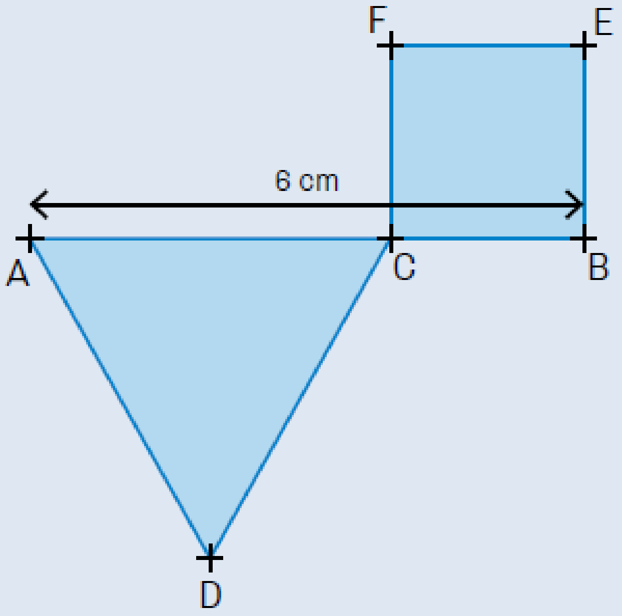
ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

Devoir hors temps scolaire

PROBLÈME À RÉSOUDRE POUR LE COURS SUIVANT

Le point C appartient au segment [AB].
La longueur du segment [AB] vaut 6 cm.
Le carré CBEF et le triangle équilatéral ADC sont dessinés de part et d'autre du segment [AB].
Où placer le point C pour que le périmètre du carré soit égal à celui du triangle ?



Exercice similaire

⇒ Ancrer la méthode de résolution

⇒ mesurer l'efficacité du travail de la séance 1

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

Séance 2

Déroulement selon les 4 mêmes étapes.

1) Permet d'évaluer les acquis des élèves après la séance 1.
2) Expliciter ce qui diffère du problème 1

Activités préparatoires

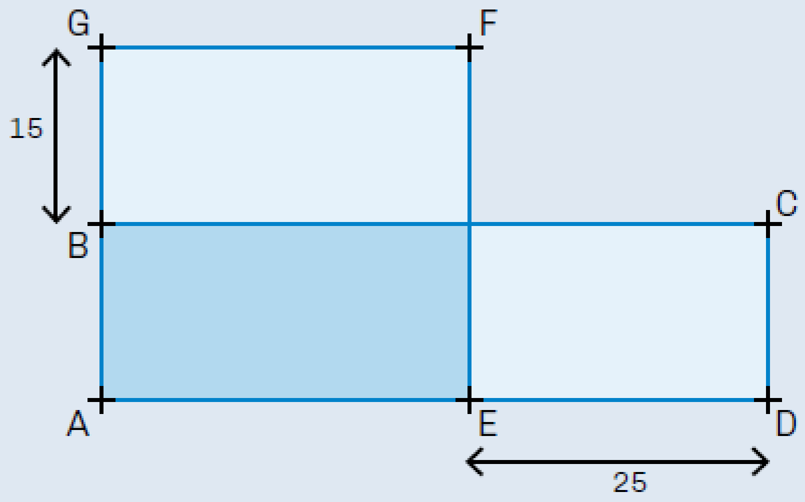
- des questions flash pour anticiper (réactiver les formules de calculs d'aire)

Mise en œuvre

- Logiciel de géométrie dynamique
- envisager une différenciation (pour les élèves à l'aise)

PROBLÈME 2 (TRANSFERT DANS UN CONTEXTE SÉMANTIQUEMENT PROCHE)

ABCD est un rectangle.
E est un point du segment [AD], B est un point du segment [AG].
AEFG est un carré.
ED = 25 et BG = 15.
Déterminer les dimensions du carré AEFG et du rectangle ABCD afin qu'ils aient la même aire.



[DNB 2014]

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

Raisonnement

On pose $x = AB$

Dimension carré : $AG = 15 + x = AE$

Dimension rectangle : $AD = x + 15 + 25$
$= x + 40$

L'aire du carré : $(x + 15)(x + 15)$

L'aire du rectangle : $x \times (x + 40)$

Contrainte : $\mathcal{A}_{AEFG} = \mathcal{A}_{ADCB}$

équation → $(x+15)(x+15) = x(x+40)$

Calculer
résoudre une équation

$x = AE$

$AG = AE = x$

$AD = x + 25$

$AB = x - 15$

$\mathcal{A}_{carré} = x \times x = x^2$

$\mathcal{A}_{rectangle} = (x+25)(x-15)$

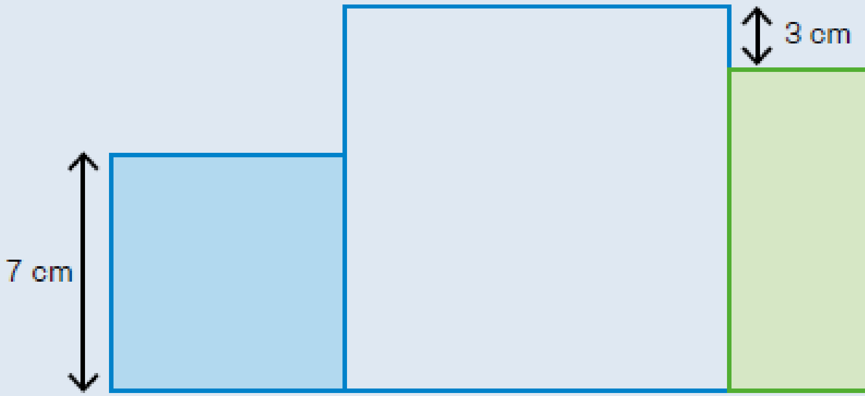
Contrainte : $x^2 = (x+25)(x-15)$

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

Séance 3

PROBLÈME 3

Voici trois carrés.
Quelles doivent être les longueurs des côtés des carrés vert et blanc pour que l'aire du carré blanc soit égale à la somme des aires des carrés bleu et vert ?



- Différencier en fonction du degré d'autonomie
  - Rappels du modelage effectué
  - et diminuer graduellement l'aide apportée
- Table d'appui

PROBLÈME 4

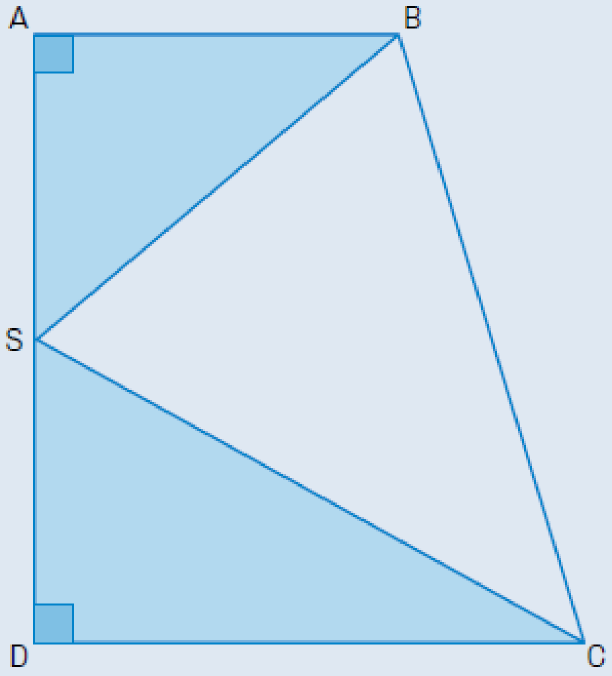
Si tous les élèves inscrits étaient venus, la sortie en autocar aurait coûté 25 € par personne. Mais il y a eu 3 absents et chaque participant a dû payer un supplément de 1,50 €.
Combien y avait-il d'inscrits ?

Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

Séance 4

PROBLÈME CIBLE

Le trapèze ABCD ci-dessous est un trapèze rectangle tel que AB = 60 cm, AD = 100 cm et DC = 80 cm.
S est un point du segment [AD].
Où placer le point S pour que les aires des triangles ABS et DSC soient égales ?



Phase d'évaluation formative

⇒ réinvestir seul le travail collectif précédent

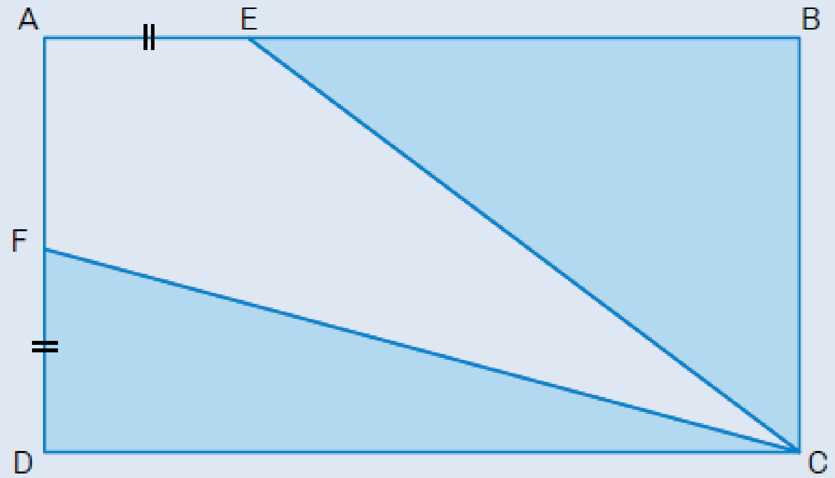
Première modalité : une étude de cas en classe de 3e

Séance 5

La remédiation

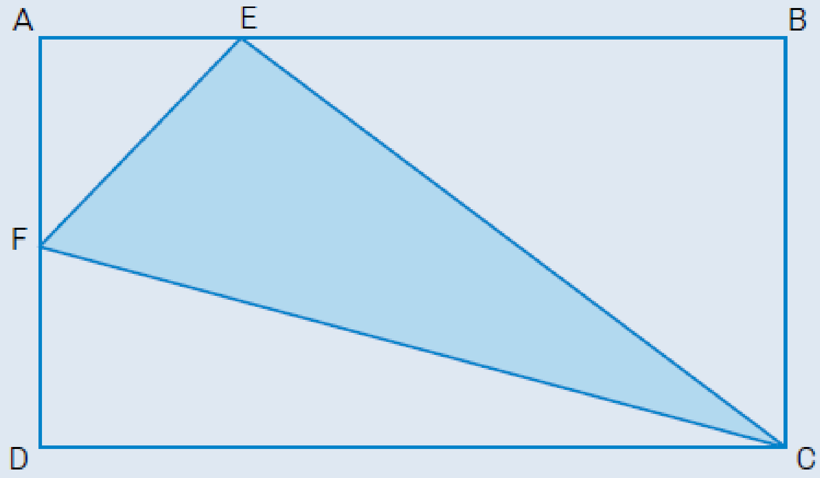
PROBLÈME : PISTE VERTE

ABCD est un rectangle tel que AB = 100 cm et BC = 60 cm.
E est un point du segment [AB] et F est un point du segment [AD] tel que AE = FD.
Où placer les points E et F pour que les aires des triangles FCD et EBC soient égales ?



AUTRE PROBLÈME POSSIBLE : PISTE NOIRE

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 6 cm.
E est le point du segment [AB] tel que AE = 4 cm.
F est un point du segment [AD].
Où placer le point F pour que l’aire du triangle FEC soit égale à 28 cm^2 ?

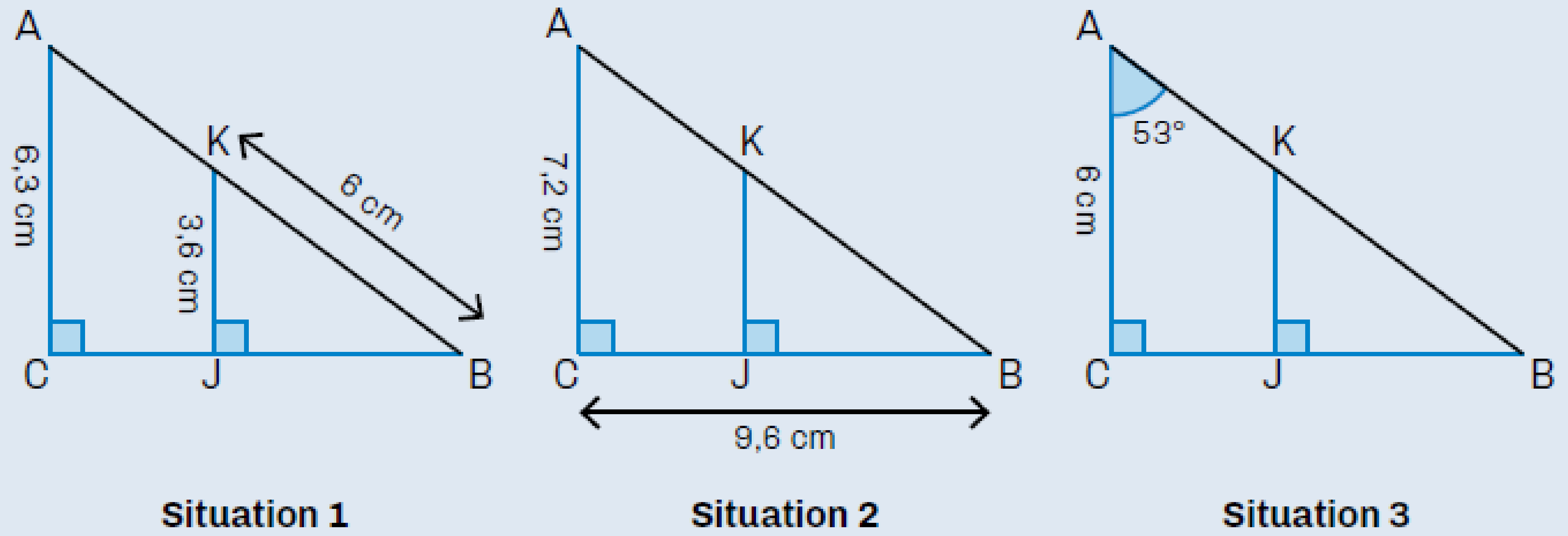


Deuxième modalité : disposer de procédures automatisées

Deuxième modalité : disposer de procédures automatisées

ÉNONCÉ

Dans chaque situation suivante, indiquer le théorème ou la définition à utiliser pour calculer la longueur AB.

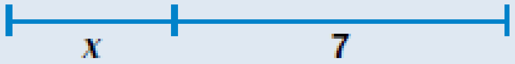


Deuxième modalité : disposer de procédures automatisées

ÉNONCÉ

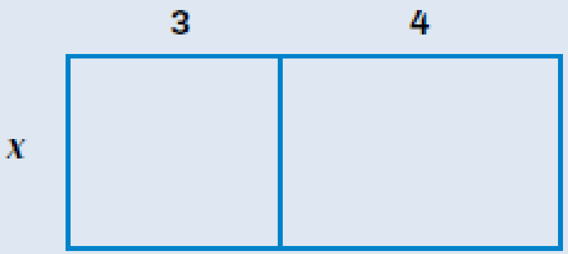
Quelle situation représente l'expression $3x + 4x$?

a. La longueur de ce segment :

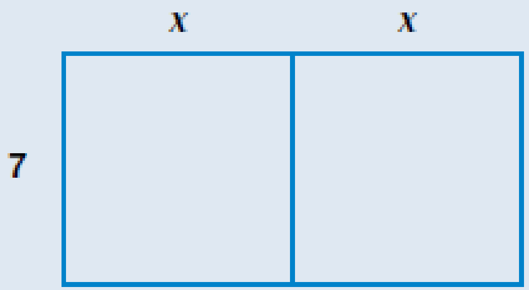


b. La longueur de ce segment :

c. L'aire de cette figure :



d. L'aire de cette figure :



Points de vigilance

- ❑ Place de l’oral et importances des traces écrites

- ❑ La difficulté de savoir quoi expliciter (expliquer ou expliciter)

- ❑ Des écueils à éviter
  - **Ne pas multiplier les objectifs de formation**
    [reléguer le traitement des erreurs des élèves à des séances ultérieures, prévoir des QF préparatoires à la résolution du problème si besoin pour éviter une trop grande surcharge cognitive chez les élèves…]
  - **Ne pas devancer la réflexion des élèves.**
    [associer les élèves à la verbalisation. Les étapes de raisonnement doivent apparaitre naturellement avant d’être nommées]

- ❑ La question du temps

ACADÉMIE
DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

ATELIER

Atelier

Trois séries de problèmes :

- ❑ Problèmes avec fractions (cycle 4)
- ❑ Problèmes de pourcentage (cycle 4)
- ❑ Problèmes de calcul d’aires (6e)

Bureau de vote 1
3600 votants
45 % des voix pour le sortant

Bureau de vote 2
1274 voix pour le sortant soit 52 % des voix

Bureau de vote 3
675 voix pour le sortant sur 1250 voix

Réponds à la question que se pose le candidat sortant en justifiant très clairement ta réponse.

- ➢ **Envisager une progression des problèmes**
- ➢ **Quels sont les éléments à expliciter avec les élèves ?**

Restitution : Problèmes de calcul d'aires

- **Compétences communes aux 3 problèmes :**

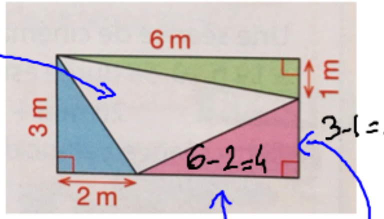
- **Raisonner** : Décomposer la figure en figures simples – Déterminer les longueurs pertinentes
- **Calculer** : Utiliser la formule de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, d'un triangle – Ajouter/Soustraire/Comparer des aires -- Utiliser des valeurs approchées
- **Communiquer** : Tout ce qui se comprend de la production de l'élève (phrases, calculs, schémas…)

- **Points à expliciter aux élèves :**

- On ne connait pas de formule qui permet de calculer directement l'aire cherchée.
- Une figure est composée de plusieurs figures simples : on cherche à reconnaître ces figures dont on sait calculer les aires.
- La connaissance de certaines longueurs, le codage d'une figure et les propriétés connues permettent de déduire d'autres longueurs.
- On réfléchit à la manière de déduire l'aire cherchée des aires des figures extraites : par soustraction, addition, recombinaison comme un puzzle…

Recherche du problème

aucune information sur les longueurs de ce triangle



Calculer l'aire du triangle non coloré.

On ne peut pas appliquer la formule de calcul de l'aire d'un triangle au triangle blanc

on peut déterminer ces longueurs (raisonner)

Raisonner

On décompose la figure en éléments dont on sait calculer l'aire : rectangle et triangles rectangles.

Aire triangle blanc = Aire rectangle − Aire triangle bleu − Aire du tri. vert − Aire du tri. rose

Aire triangle blanc = $6 \times 3 - 3 \times 2 \div 2 - 6 \times 1 \div 2 - 4 \times 2 \div 2$

Aire triangle blanc = $18 - 3 - 3 - 4$

Aire triangle blanc = 8

Calculer

L'aire du triangle blanc est égale à 8 m²

Communiquer : toutes les étapes sont rédigées

Restitution : Problèmes avec pourcentages

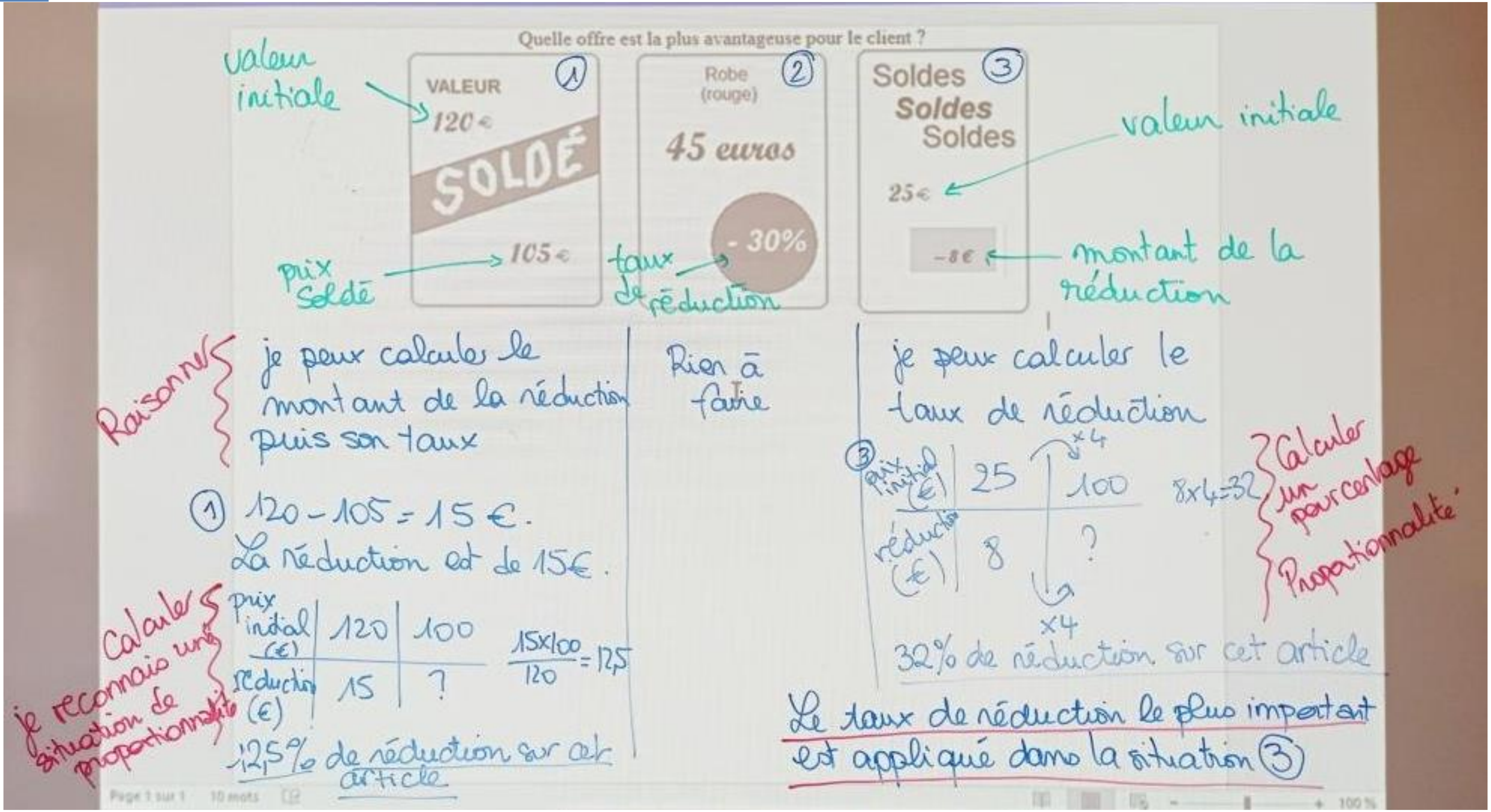
- Même structure mathématique ou pas ?

- Les problèmes traitant d'évolution mettent en relation des valeurs de deux natures : grandeur ou pourcentage. On fera remarquer aux élèves que la connaissance de deux de ces valeurs permet de calculer la troisième.

Pour le problème 3, *en lien avec la compétence Chercher, on liste les valeurs données et celles qui pourraient s'en déduire.*
En lien avec la compétence Raisonner : il s'agit d'identifier celle(s) qui nous intéresse(nt) dans l'exercice puis de les comparer.
On mobilise ensuite la compétence Calculer : on fera remarquer aux élèves que l'on a recours à de la proportionnalité : calcul d'un pourcentage.

Problème 4 : *La première offre donne explicitement le taux : 25%.*
Pour la seconde, la connaissance du nombre initial de produit et du nombre de produit offert permet de déduire le taux correspondant à l'offre. On n'a plus ensuite qu'à comparer les deux taux.
Il s'agit à nouveau d'avoir recours à un calcul de pourcentage. (recours à de la proportionnalité).

Le problème 1 *présente une difficulté supplémentaire avec le calcul d'une grandeur quotient pour comparer les deux promotions.*

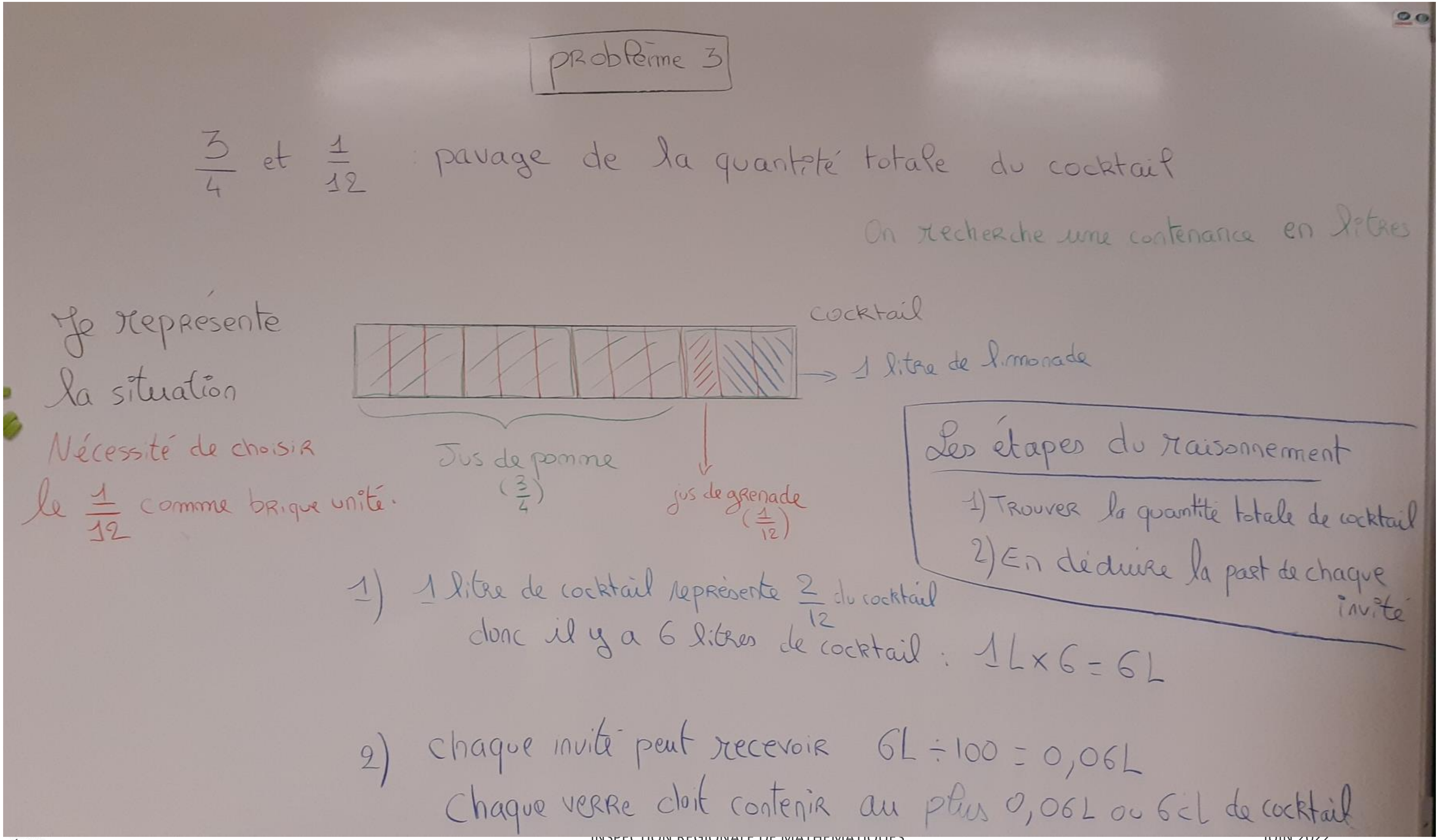


Quelle offre est la plus avantageuse pour le client ?
VALEUR 120 €
SOLDÉ
105 €
Robe (rouge)
45 euros
- 30%
Soldes Soldes Soldes
25 €
-8 €
valeur initiale
prix soldé
taux de réduction
valeur initiale
montant de la réduction
Raisonner
je peux calculer le montant de la réduction puis son taux
Rien à faire
je peux calculer le taux de réduction
① 120 - 105 = 15 €.
La réduction est de 15 €.
prix initial (€) | 120 | 100
réduction (€) | 15 | ?
15×100/120 = 12,5
12,5% de réduction sur cet article
Calculer
je reconnais une situation de proportionnalité
③ prix initial (€) | 25 | 100
réduction (€) | 8 | ?
×4
8×4=32
Calculer un pourcentage
Proportionnalité
32% de réduction sur cet article
Le taux de réduction le plus important est appliqué dans la situation ③

Restitution : Problèmes avec fractions

Points à expliciter aux élèves :

- Les fractions peuvent exprimer un nombre ou une proportion d'une quantité (vision partage). Elles peuvent être notées en écriture fractionnaire ou en lettres
- Pour chaque grandeur en jeu, on s'intéresse soit à sa quantité soit à sa proportion par rapport à une unité/un tout.
- Il s'agit d'identifier la nature des données de l'énoncé et l'unité considérée ainsi que la nature de la réponse attendue.
- La représentation de la situation (par exemple par le modèle en barres) participe de la compétence *Chercher*. Elle permet de dégager les étapes du raisonnement. Elle facilite également la compréhension du besoin de réduire au même dénominateur.
  Le modèle en barre permet d'indiquer les proportions comme les quantités en jeu.


problème 3
$\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{12}$ pavage de la quantité totale du cocktail
On recherche une contenance en litres
Je représente la situation
cocktail
→ 1 litre de limonade
Nécessité de choisir le $\frac{1}{12}$ comme brique unité.
Jus de pomme ($\frac{3}{4}$)
jus de grenade ($\frac{1}{12}$)
Les étapes du raisonnement
1) Trouver la quantité totale de cocktail
2) En déduire la part de chaque invité
1) 1 litre de cocktail représente $\frac{2}{12}$ du cocktail
donc il y a 6 litres de cocktail : 1L × 6 = 6L
2) chaque invité peut recevoir 6L ÷ 100 = 0,06L
Chaque verre doit contenir au plus 0,06L ou 6cL de cocktail