Énig'm@tiques

ACADÉMIE
DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

SEMAINE DES MATHEMATIQUES 2024

Première & Terminale

Corrigés

Énigme 1

Tour de piste

Soit x le rayon du demi-disque.

<u>Étape 1 :</u> Expression de l'aire du terrain

La largeur du rectangle est égale à $2x$ m.
L'aire du rectangle central est donc égale à 100 m × $2x$ m, soit $200x$ m².
L'aire des deux demi-disques est égale à πx^2 m².
Ainsi, l'aire du terrain d'athlétisme est égale à $200x + \pi x^2$ m².

<u>Étape 2 :</u> Résolution d'une équation

Nous savons que l'aire du terrain vaut 7 200 m².
Nous devons donc résoudre l'équation du second degré : $200x + \pi x^2 = 7\,200$.
Cette équation est équivalente à $\pi x^2 + 200x - 7\,200 = 0$.

Calculons le discriminant : $\Delta = 200^2 - 4 \times \pi \times (-7\,200) \approx 130478 > 0$

Cette équation possède alors deux solutions : $x_1 \approx -89,3$ et $x_2 \approx 25,7$.

La première solution est évidemment à rejeter car négative.
Le rayon des demi-disques vaut alors 25,7 m (arrondi au dixième).

<u>Étape 3 :</u> Calcul du périmètre du terrain

Le périmètre du terrain d'athlétisme est la somme du périmètre du cercle et du double de la longueur du rectangle.
On obtient alors : $2 \times \pi \times 25,7$m + 2×100 m, soit environ 361,5 m (arrondi au dixième).

Le périmètre de ce terrain est donc environ égal à 361,5 m.

Énigme 2

Chacun son tour

On se place dans le repère orthonormé d'origine *A* tel que $B(0;1)$, $C(2;1)$, $D(2;0)$ et $E(1;0,5)$.

On considère le point *O*, centre du cercle circonscrit au triangle *CDE*.
O appartient à la médiatrice de $[CD]$ d'équation $y=0,5$. On en déduit que $y_O=0,5$.

Comme $OD=OE$, il vient :
$(x_O-2)^2+0,5^2=(x_O-1)^2$, ce qui donne après simplification $x_O=1,625$

Ainsi, $r=0,625$
Pour conclure : $2\times 6=12$ et $3\times 2\times \pi \times 0,625\approx 11,78$

Bravo Yohann !

Énigme 3

Sacré numéro !

Chaque nombre étant constitué d'un chiffre de l'écriture décimale de e et de π, le prochain nombre est **25**.

Énigme 4

Des poings et des points

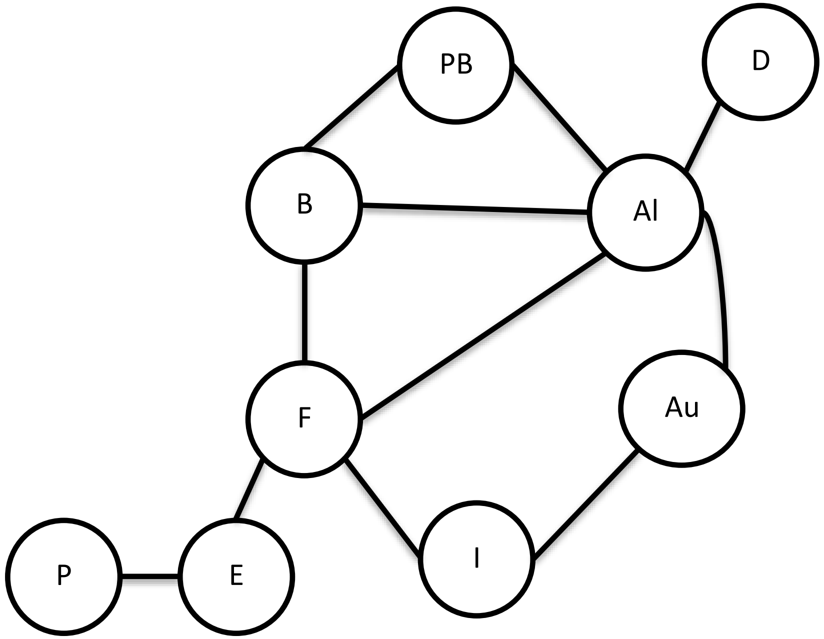
En partant d'un tableau où tous les matchs avaient rapporté un point aux deux équipes (matchs nuls), puis en transformant 4 résultats nuls en victoires en veillant à obtenir des totaux différents, on obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F
A		1	1	1	0	0
B	1		1	1	1	0
C	1	1		1	1	1
D	1	1	1		3	1
E	3	1	1	0		1
F	3	3	1	1	1	
POINTS	9	7	5	4	6	3

Réponse : 3, 4, 5, 6, 7 et 9 points.

Énigme 5

Casse-tête européen



Représentons la situation par le schéma ci-contre, où deux pays sont reliés lorsqu'ils ont une frontière commune.

Lorsque trois pays forment « un triangle », alors ils doivent être dans trois équipes différentes.

C'est le cas pour F-B-Al. On commence donc par placer ces trois pays.
C'est aussi le cas pour PB-B-Al, ainsi PB sera dans l'équipe de F.

À partir de là se présentent plusieurs choix. Seuls P, Au et D peuvent compléter l'équipe F-PB :

- si P est dans l'équipe de F et PB alors, il n'y a qu'un seul choix car D et Au ne peuvent être avec Al ;
- si Au est dans l'équipe de F, deux solutions sont possibles en plaçant P et E dans deux équipes différentes. Dans cette situation, D est nécessairement avec B et par conséquent I avec Al ;
- si D est dans l'équipe de F, comme précédemment, deux solutions sont possibles en plaçant E et P dans deux équipes différentes. Au est nécessairement avec B et par conséquent I avec Al.

Finalement, il y a 5 façons de construire les équipes :

Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3
France Pays-Bas Portugal	Belgique Autriche Danemark	Allemagne Italie Espagne

Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3
France Pays-Bas Autriche	Belgique Espagne Danemark	Allemagne Portugal Italie

Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3
France Pays-Bas Autriche	Belgique Portugal Danemark	Allemagne Espagne Italie

Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3
France Pays-Bas Danemark	Belgique Espagne Autriche	Allemagne Portugal Italie

Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3
France Pays-Bas Danemark	Belgique Portugal Autriche	Allemagne Espagne Italie

Énigme 6

Enig'm@tiques

On pose *t*, *d* et *u* le nombre de participants ayant résolu respectivement trois, deux et une énigme.
On a donc :

$$\begin{cases} t + d + u = 500 \\ 1000t + 200d + 5u = 8800 \end{cases}$$

On transforme le système en multipliant la première ligne par 40 et en divisant la deuxième par 5 :

$$\begin{cases} 40t + 40d + 40u = 20000 \\ 200t + 40d + u = 1760 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient :

$$-160t + 39u = 18240 \Leftrightarrow 39u = 160t + 18240$$

Or, $160 = 39 \times 4 + 4$et $18240 = 39 \times 467 + 27$. Donc :

$$39u = 160t + 18240 \Leftrightarrow 39u = (39 \times 4 + 4)t + 39 \times 467 + 27 \Leftrightarrow u = 4t + 467 + \frac{4t + 27}{39}$$

Puisque *u* est entier (c'est un nombre de participants), il faut donc que $4t + 27$ soit un multiple de 39. C'est le cas avec $t = 3$, puisque $4 \times 3 + 27 = 39$. La prochaine valeur de *t* qui convient est 42, mais cela ferait au moins 42 000€ de prix, ce qui est trop.

On a donc $t = 3$. D'où :

$$u = 4 \times 3 + 467 + \frac{4 \times 3 + 27}{39} = 480$$

On en déduit : $d = 500 - t - u = 500 - 3 - 480 = 17$
Réciproquement, les valeurs $t = 3, d = 17$et $u = 480$ conviennent.

Il y a donc 3 participants qui ont résolu les 3 énigmes, 17 qui en ont résolu 2 et 480 qui n'en ont résolu qu'une seule.

On peut aussi utiliser la fonction Python ci-contre :

```python
def cherche_solutions():
    for t in range(500):
        for d in range(500-t):
            u = 500 - t - d
            if 1000*t+200*d+5*u == 8800:
                print("3 énigmes :", t, "| 2 énigmes :", d, "| 1 énigme :", u)
```

```
>>> cherche_solutions()
3 énigmes : 3 | 2 énigmes : 17 | 1 énigme : 480
```

Énigme 7

Votez pour moi !

Soit x le nombre de candidats (garçons)
$x + 8$ désigne nombre de candidates (filles)
$2x + 8$ désigne nombre de candidats (filles et garçons)

Avec $(2x + 8)$ élèves, on peut former $\frac{(2x+8)!}{2!(2x+6)!}$ binômes différents.

Pour les élèves de Première ne connaissant pas les coefficients binomiaux :

Il y a $2x + 8$ choix possibles pour le 1er délégué et $2x + 7$ choix possibles pour le 2ème délégué.

Par le principe multiplicatif, il y a $(2x + 8) \times (2x + 7)$ choix possibles mais il faut diviser ce résultat par 2 pour ne pas compter deux fois le même binôme.

Ce qui donne $\frac{(2x+8)(2x+7)}{2} = 2x^2 + 15x + 28$

$2x + 8$ désigne le nombre de binômes avec Pierre et une fille.
La probabilité de l'énoncé nous permet de modéliser l'équation suivante :

$$\frac{x+8}{2x^2+15x+28} = 0,1 \Leftrightarrow 0,2x^2 + 0,5x - 5,2 = 0$$

Ce qui donne pour solutions potentielles $x_1 = 4$ et $x_2 = -6,5$ (la deuxième n'étant pas possible vu que $x > 0$).

Conclusion : $2 \times 4 + 8 = 16$: **il y a 16 candidats**.