MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Exercices Académiques

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

L'épreuve se déroule par groupes de 1 à 4 élèves, chaque groupe rédige une seule copie, sans limitation du nombre de pages.

Il est conseillé aux groupes de candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition, ils pourront être restitués aux candidats le lendemain.

Chaque groupe de candidats traite **deux exercices.**

- Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
- Les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Les grandes puissances

La cryptologie permet d'assurer la confidentialité des messages et de garantir leur authenticité. Les méthodes modernes nécessitent des calculs avec de très grands nombres, notamment des calculs de grandes puissances très coûteux en temps. On étudie dans cet exercice un algorithme qui permet de diminuer de manière significative le nombre d'opérations à effectuer lors de calculs de grandes puissances d'un nombre réel.

N.B. Les multiplications par 1 ne seront pas prises en compte dans le dénombrement des opérations effectuées. On ne prendra pas non plus en compte la division par 2 ou la soustraction par 1, qui sont effectuées très rapidement par l'ordinateur.

1. Le calcul « habituel » de a^n (a nombre réel, n entier naturel supérieur ou égal à 2) peut-être obtenu à l'aide de l'algorithme suivant écrit en langage naturel ou écrit sous forme de fonction en langage Python :

<table>
<tr><td>Langage naturel</td><td>Fonction Python</td></tr>
<tr><td>saisir a
saisir n
r ← a
pour i allant de 1 à n−1
    r ← r x a
fin pour
afficher r</td><td>def puissance (a,n) :
    r=a
    for i in range (n-1) :
        r=r*a
    return r</td></tr>
</table>

a) Calculer ainsi 3^{17}. Combien de multiplications avez-vous effectuées ?

b) Avec cette méthode, combien faudrait-il effectuer de multiplications pour calculer 3^{2020} ?

2. On propose une amélioration du calcul de grandes puissances. En remarquant que $17 = 2^4 + 1$, proposer un calcul de 3^{17} nécessitant seulement 5 multiplications à partir du nombre 3.

3. On souhaite, à l'aide de l'algorithme ci-dessous, généraliser et automatiser la méthode utilisée à la question précédente pour calculer a^n où a est un nombre réel et n est un entier naturel non nul.

```
saisir a, saisir n
p=1
b=a
m=n
tant que m>0
        si m est impair
            p=pxb
            m=m-1
        fin si
        b=bxb
        m=m/2
fin tant que
afficher p
```

a) Faire tourner cet algorithme avec a = 5 et n = 4 ; indiquer les valeurs successives de p, de b et de m.

b) Pourquoi peut-on affirmer que le programme se termine toujours ?

c) Combien de multiplications devrait-on effectuer pour calculer 3^{2020} avec le programme ci-dessus ?

4. On suppose dans cette question que n est un entier naturel compris entre 200 et 300. *On rappelle que les multiplications par 1 ne sont pas prises en compte.*

a) Pour quelle valeur de n le nombre minimal de multiplications à effectuer lors de l'utilisation de cet algorithme est-il atteint pour le calcul de 3^n ? Quel est ce nombre minimal ?

b) Pour quelle valeur de n le nombre maximal de multiplications à effectuer lors de l'utilisation de cet algorithme est-il atteint pour le calcul de 3^n ? Quel est ce nombre maximal ?

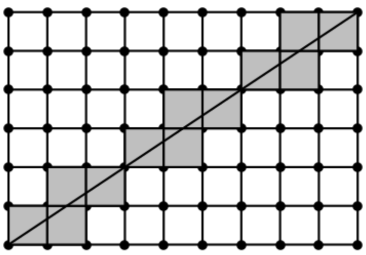
Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Les diagonales

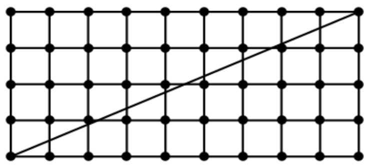
On rappelle qu'un rationnel est un réel qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs avec $b \neq 0$.

Partie 1 : diagonale dans un quadrillage

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On considère un rectangle qui admet un quadrillage $n \times p$ (c'est-à-dire de n carrés par p carrés) et on trace une diagonale de ce rectangle.



Chaque carré traversé par la diagonale est grisé et le résultat est une représentation "pixellisée" de cette diagonale. Dans un quadrillage 9×6, on obtient le résultat ci-contre.

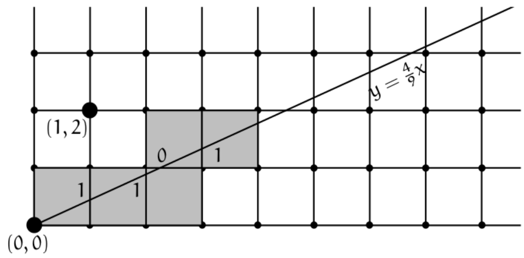


1) Combien de carrés faut-il griser avec une diagonale dans un quadrillage 9×4 ?

2) Combien de carrés faut-il griser avec une diagonale dans un quadrillage 45×20 ?

Partie 2 : un algorithme

On se place dans un repère d'origine le point en bas à gauche du quadrillage. Les points du quadrillage sont les points à coordonnées entières. On a dessiné ci-contre la droite D_α d'équation $y = \alpha x$ dans le cas où $\alpha = \frac{4}{9}$. On appellera pixel un carré grisé.



En partant du pixel en bas à gauche repéré par (0 ; 0), on applique les règles suivantes pour le faire «glisser » le long de la droite :

- si D_α traverse une verticale (sans passer par un nœud du quadrillage), le pixel glisse vers la droite (déplacement noté "1")
- si D_α traverse une horizontale (sans passer par un nœud du quadrillage), le pixel glisse vers le haut (déplacement noté "0")
- si D_α passe par un nœud de quadrillage, le pixel glisse vers le haut et vers la droite (déplacement "2").

La suite de 0,1 ou 2 obtenue est appelée chemin de la droite D_α.

1) Compléter l'algorithme donné **en annexe (à rendre avec la copie),** qui construit la suite des k premiers déplacements le long d'une droite D_α..

Par exemple, pour $\alpha = \frac{4}{9}$ et k=20, l'algorithme renvoie les 20 premières étapes du chemin de la droite $D_{\frac{4}{9}}$: 11011011011211011011

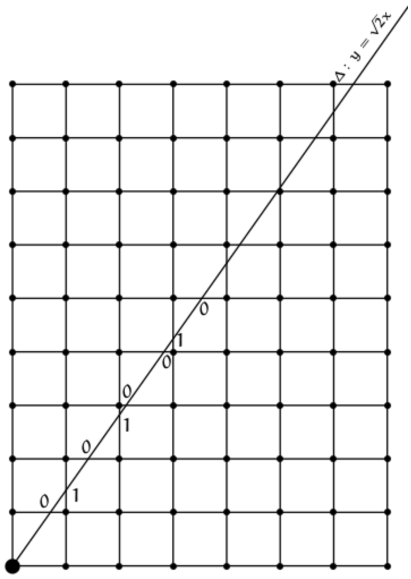
2) La suite de nombres : 0010001002 est le début du chemin d'une droite de pente α . Combien vaut α ?

3) La suite de nombres : 0010 est le début du chemin d'une droite. Pourquoi ne peut-il pas se continuer avec 0000 ?

Partie 3 : cas $\alpha = \sqrt{2}$

On rappelle que le réel $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On note Δ la droite d'équation $y = \sqrt{2}x$ dessinée dans le quadrillage ci-contre. Dans toute la suite, on considère le chemin de la droite $D_{\sqrt{2}}$.



Pour $\alpha = \sqrt{2}$, l'algorithme précédent fournit un chemin dont on donne le début :

0101001010010...

1) Démontrer que l'algorithme ne produira jamais aucun « 2 ».

2) Démontrer qu'il ne peut pas y avoir deux "1" consécutifs.

3) Démontrer qu'il ne peut pas y avoir plus de deux « 0 » consécutifs.

4) Voici les 41 premières valeurs du chemin de la droite Δ :

01010010100101010010100101010010100101001

A partir de cette suite, comment obtenir la fraction de dénominateur 17 la plus proche de $\sqrt{2}$?

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Les disques de Rubik

On considère un jeu constitué de deux disques pouvant tourner chacun autour d'un axe et fixés sur un support de jeu et de 9 pièces disposées sur ces disques.

<u>Présentation du jeu :</u> deux disques, un à gauche et un à droite permettent de faire tourner 9 pièces ellipsoïdales notées : 0, 1, 2, 3, 4, a, b, c, d, parmi lesquelles une pièce est commune aux deux disques (voir figure 1 par exemple). On a gravé sur le support de jeu les positions fixes : I,II,III, IV, α, β, γ et δ.

Le but du jeu est de retrouver la configuration de la figure 4 à partir d'une configuration donnée au départ en faisant tourner les disques dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse.

<u>Exemple :</u> on suppose que la configuration initiale est celle de la figure 1 ; on a montré les configurations intermédiaires (figure 2 et figure 3) pour parvenir à la position voulue (figure 4).

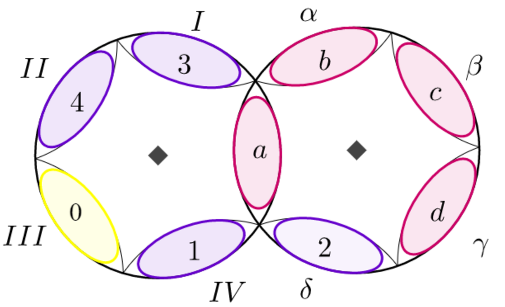


Figure 1

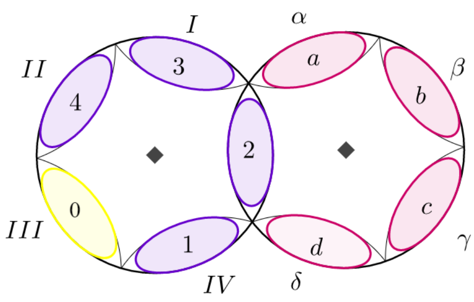


Figure 2

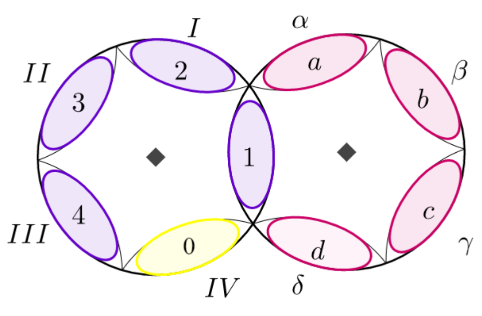


Figure 3

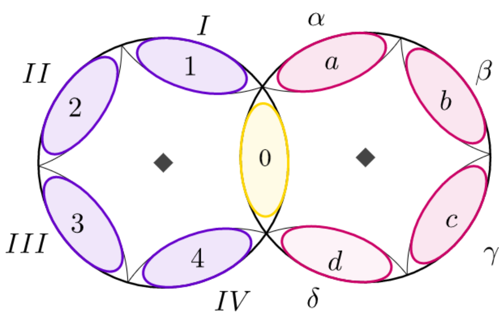


Figure 4

Ainsi, dans la figure 1, les pièces notées b, c, d, 2 sont sur le disque de droite, les pièces 0, 1, 3, 4 sont sur le disque de gauche et la pièce notée a est commune aux deux disques.

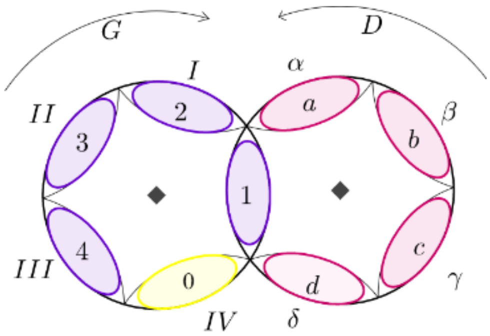
Pour passer à la configuration de la figure 2, on fait tourner le disque de droite dans le sens des aiguilles d'une montre : ainsi, toutes les pièces du disque de droite ont bougé tandis que les pièces du disque de gauche n'ont pas bougé (excepté la pièce notée a remplacée par la pièce notée 2).

Pour passer de la figure 2 à la figure 3, on fait tourner le disque de gauche dans le sens inverse des aiguilles d'une montre tandis que le disque de droite n'a pas bougé.

1. Déterminer le disque qui a tourné et le mouvement effectué pour passer de la configuration de la figure 3 à celle de la figure 4 (fin du jeu).

Notations :

- L'opération consistant à faire tourner d'un cran le disque de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre sera notée G. L'opération consistant à faire tourner d'un cran le disque de droite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sera notée D.



- On notera G^{-1} et D^{-1} les opérations dans le sens inverse.
- On pourra enchainer les opérations en écrivant les évènements dans l'ordre chronologique. On obtient ainsi un déplacement.

Ainsi le déplacement GD correspond à faire tourner le cercle de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre d'un cran puis celui de droite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre d'un cran.

2. A l'aide des notations G^{-1} et D^{-1}, écrire les trois opérations permettant de passer de la configuration de la figure 1 à celle de la figure 4.

3. On part d'une configuration quelconque puis on effectue le déplacement GDDG^{-1}.

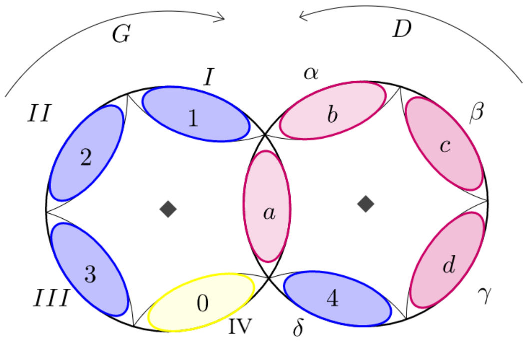
   a) Proposer un déplacement utilisant G, G^{-1} et D^{-1} permettant de revenir à la configuration avant déplacement.

   b) Proposer un autre déplacement n'utilisant ni G^{-1} ni D^{-1} permettant de revenir à la configuration avant déplacement.

4. Le déplacement $\mathrm{GD}^{-1}\mathrm{G}^{-1}\mathrm{D}$ permet le déplacement suivant : la pièce en δ va à la position I, la pièce en I va à la position commune aux deux disques, la pièce qui était à la position commune va à la position δ, les autres pièces sont revenues à leur position de départ. Que se passe-t-il si l'on effectue deux fois ce déplacement ? Trois fois ?

5. On considère dans cette question le déplacement : $\mathrm{DGD}^{-1}\mathrm{G}^{-1}$. Si toutes les pièces sont, au départ, à leur place (figure 4), quelles sont celles qui n'ont pas été affectées par ce déplacement ? Quel est l'effet de ce déplacement ?

6. Quelles opérations faut-il réaliser, si l'on part de la position ci-dessous, pour arriver dans la configuration de la figure 4 ?



7. Combien y a-t-il de déplacement de quatre opérations permutant seulement trois pièces (c'est-à-dire à l'issue de ces quatre opérations, trois pièces ont bougé et les six autres pièces sont à la même place) ? Lister ces déplacements.

Etablissement :

Numéro du groupe :

ANNEXE à rendre avec la copie (exercice 2 pour les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques) :

```
Entrée :
Saisir le réel α > 0
Saisir l'entier naturel k
Traitement :
x ← 0
y ← 0
Pour i allant de 1 à k faire
        Si ........... alors :
                x ← x + 1
                Afficher("1")
        Sinon si ........... alors :
                ...........
                Afficher("0")
        Sinon :
                ...........
                ...........
                Afficher("2")
Fin Pour
```