Les grandes puissances

Eléments de correction

1 – Calcul « habituel » de a^n .

a) Calculer ainsi 3^{17}. Combien de multiplications avez-vous effectué ?

3^{17} = 3x3x … x 3 il faudrait effectuer 16 multiplications.

b) Avec cette méthode, combien faudrait-il effectuer de multiplications pour calculer 3^{2020} ?

Il faudrait de même 2019 multiplications

2 – Une amélioration : on remarque que 17 = 2^4 + 1.

En déduire un calcul de 3^{17} nécessitant seulement 5 multiplications.

On calcule 3x3 = 9 (=3^2), puis 9x9 = 81 (=3^4), puis 81x81 = 6561 (=3^8), puis 6561x6561 = 43046721 et enfin 3x 43046721 = 129140163.

Nous avons bien effectué 5 multiplications.

3 – On souhaite généraliser et automatiser la méthode utilisée à la question précédente pour calculer a^n où n est un entier naturel non nul.

a) Faire tourner cet algorithme avec a = 5 et n = 4

	p	b	m
	1	5	4
multiplication par 5	1	25	2
multiplication par 25	1	625	1
	625	625	0

on obtient 5^4 = 625 en seulement deux multiplications (la dernière étape est une multiplication par 1)

b) Pourquoi peut-on affirmer que le programme se termine toujours ?

L'entier naturel m diminue strictement à chaque étape puisqu'il est diminué de 1 s'il est impair et divisé par 2 s'il est pair. On obtiendra donc en un nombre fini d'étapes m=2, puis m=1 et enfin m= 0, qui provoque l'arrêt du programme.

c) Combien de multiplications devrait-on effectuer pour calculer 3^{2020} avec l'algorithme ci-dessus ?

Les valeurs successives de m sont 2020, 2019, 2018, 1009, 1008, 504, 252, 126, 63, 62, 31, 30, 15, 14, 7, 6, 3, 2, 1, 0, il faut donc effectuer 18 multiplications (une à chaque nouvelle valeur de m, sauf pour la dernière).

4 – On suppose dans cette question que n est un entier naturel compris entre 200 et 300.

a) Quel est le nombre minimal de multiplication à effectuer lors de l'utilisation de cet algorithme ?

Le cas le plus favorable correspond à une diminution la plus rapide possible de m, ce qui a lieu quand m est divisé par 2 jusqu'à atteindre 1, c'est à dire lorsque n est une puissance de 2.

Pour n compris entre 200 et 300, ce minimum est atteint pour n=2^8=256, et seulement 8 multiplications seront effectuées.

b) Quel est le nombre maximal de multiplications ?

Cela correspond aux cas où les valeurs de m sont le plus souvent impaires : en « remontant », on obtient 1, 3, 7, 15, 31 … et plus généralement tous les nombres de la forme 2^n-1.

Entre 200 et 300, la situation la plus défavorable est atteinte pour n=255.

L'algorithme donne les résultats suivants, après 14 multiplications :

p	b	m
1	3	255
3	3	254
3	9	127
27	9	126
27	81	63
2187	81	62
2187	6561	31
14348907	6561	30
14348907	43046721	15
617673396283947	43046721	14
617673396283947	1853020188851841	7
1,1445612734308E+30	1853020188851841	6
1,1445612734308E+30	3,43368382029E+30	3
3,9300615259129E+60	3,43368382029E+30	2
3,9300615259129E+60	1,17901845777E+61	1
4,633615079238E+121	1,17901845777E+61	0