Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Académie de Grenoble

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Chaque groupe de candidats traite **deux exercices et rend une seule copie :**

- les exercices numéros 1 et 2 pour les candidats de la série S,
- les exercices numéros 1 et 3 pour les candidats des séries ES, L et STMG,
- les exercices numéros 1 et 4 pour les candidats des séries STI2D et STD2A.

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Le Dobble

Nous souhaitons créer un jeu de cartes. Sur chaque carte seront représentés un certain nombre de symboles de manière que sur **deux cartes quelconques figurent toujours un symbole commun <u>et un seul</u>**.
Pour un jeu de trois cartes, on peut par exemple utiliser les symboles A, B et C, et les cartes AB, AC et BC. Dans cet exemple : 3 symboles ont été utilisés, il y a 2 symboles par carte et chaque symbole apparaît sur deux cartes.
L'ordre des symboles n'est pas pris en compte, ainsi AB et BA désignent la même carte.

Un jeu respectant les critères suivants sera dit « <u>jeu valide</u> » :

- **C1** : deux cartes quelconques disposent toujours d'un symbole commun et un seul
- **C2** : chaque symbole apparaît au moins deux fois dans le jeu
- **C3** : chaque symbole doit apparaître le même nombre de fois sur l'ensemble du jeu de cartes
- **C4** : le nombre de symboles par carte doit être le même pour toutes les cartes
- **C5** : une carte ne peut contenir deux fois le même symbole.

Nous noterons :

- *s* le nombre de **s**ymboles utilisés ; dans toute la suite, ces symboles seront notés A, B, C, D, ….
- *u* le nombre de cartes **u**tilisant un symbole donné.
- *p* le nombre de symboles **p**résents sur chaque carte .
- *c* le nombre de cartes dans le jeu.

<u>I Découverte :</u>

1. Les trois jeux suivants ne sont pas des jeux « valides ». Expliquer à chaque fois pourquoi :

- **<u>Jeu 1 :</u>** ABD ; ACE ; BCF **<u>Jeu 2 :</u>** ABC ; ADE ; BDF ; FAG ; GBE **<u>Jeu 3 :</u>** ABC ; ABD ; DC

2. Peut-on fabriquer un « jeu valide » de quatre cartes avec seulement deux symboles par carte ?

3. Une carte du « jeu valide » ci-contre suivant a été égarée.
Retrouver cette neuvième carte.

CEFG	DIGK	AJGL
CHIJ	?	DHFL
ABCD	BKFJ	BEIL

<u>II Le cas *u = 2* :</u>

1. Compléter le jeu de trois cartes proposé en exemple, pour obtenir un jeu valide de quatre cartes avec *u=2 ; s = 6* et *p = 3. : Carte 1 : A B …*

Carte 2 : A C ... *Carte 3 : B C ...* *Carte 4 : … … ...*

2. Chaque symbole n'apparaissant que deux fois dans le jeu, proposer une expression du nombre *c* de cartes en fonction de *p.* Conjecturer également une expression de *s* en fonction de *p.*

3. Toujours dans le cas où *u =2,* on suppose construit un jeu de *n* cartes.
Ecrire un algorithme permettant de compléter ce jeu en un jeu de *n+1* cartes.
On pourra écrire cet algorithme en français en utilisant l'instruction : « ajouter le symbole n°i à la carte n°j ».

<u>III Le cas général</u> : Dans cette partie, on considère un jeu valide de *c* cartes.

1. On recherche dans cette question des relations entre les nombres c, s, u et p.
a) Exprimer de deux façons différentes le nombre de couples de cartes.
b) Exprimer de deux façons différentes le nombre total de symboles dessinés dans le jeu.
c) En déduire les deux formules suivantes : $c = \mathrm{p}(\mathrm{u}-1)+1$ et $s = \frac{\mathrm{cp}}{\mathrm{u}}$.

2. Justifier qu'il n'existe pas de « jeu valide » de 8 cartes avec *u* = 3.

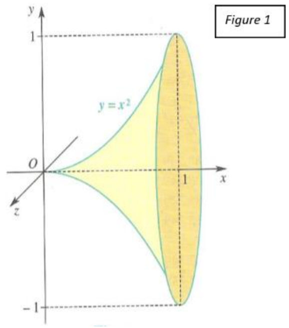
3. Montrer que le triplet (*s, u, p*) = (*14, 6, 4*) ne permet pas de construire un « jeu valide » de 21 cartes.
Que peut-on en conclure par rapport aux formules précédentes ?

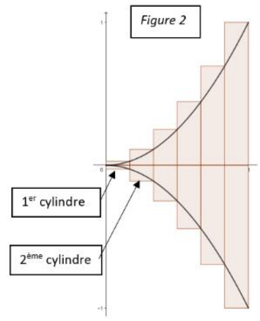
Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

La trompette

Partie A : le volume de la trompette

Un objet a la forme d'une « trompette » : un solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Ox) le morceau de parabole qui représente la fonction carré sur [0 ;1] (*Figure 1*). On souhaite calculer le volume de cet objet.





Pour obtenir une valeur approchée par excès du volume de la trompette, on adopte le principe suivant : on partage le segment [0 ; 1] en n parties égales, n étant un entier supérieur ou égal à 2 ; on construit des cylindres extérieurs à la trompette, comme l'indique la *Figure 2* (cas où $n = 6$).

1. **a.** Déterminer le rayon et la hauteur de chacun des deux premiers cylindres lorsque $n = 6$.

   b. Calculer le volume des deux premiers cylindres lorsque $n = 6$ puis dans le cas général, pour une valeur quelconque de n (n étant un entier supérieur ou égal à 2)

2. Concevoir un algorithme qui calcule et affiche la somme des volumes des n cylindres ainsi construits lorsqu'on saisit un entier n supérieur ou égal à 2.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note V_n la somme des volumes des n cylindres construits comme indiqué précédemment. Démontrer que $V_n = \dfrac{\pi}{n^5}\ (1 + 2^4 + \cdots + n^4)$.

4. Calculer une estimation du volume de la trompette, obtenue à l'aide de la somme des volumes de 160 cylindres. On arrondira le résultat au centième près.

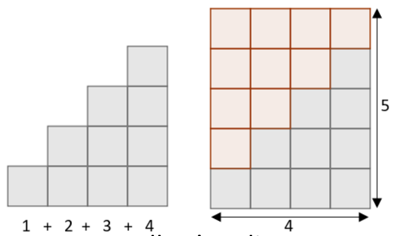
Partie B : des calculs de sommes

L'objectif de cette partie est de découvrir une méthode permettant le calcul direct de la somme $1 + 2^4 + \cdots + n^4$ *qui intervient dans le calcul du volume de la trompette.*

1. Pour un entier n supérieur ou égal à 2, on considère la somme des n premiers entiers naturels non nuls : $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

   La figure ci-contre suggère une façon de calculer $1 + 2 + 3 + 4$.

   Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$



2. Pour démontrer cette formule, on propose ci-après une autre méthode, intéressante car elle s'applique encore pour calculer d'autres sommes. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

   a. Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $C_n = C_{n+1} - n^2 - 2n - 1$.

   b. On a pour tout entier $n \geq 2$:

   $$C_{n+1} = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + \cdots + \left((n-1)+1\right)^2 + (n+1)^2.$$

   Développer chaque carré, puis justifier que $C_{n+1} = C_n + 2 \times S_n + (n+1)$.

   c. Déduire des questions précédentes la valeur de S_n.

3. **a.** Soit k un entier naturel. Développer $(k+1)^3$.

   b. En s'inspirant de la méthode décrite au **2.**, déterminer une formule permettant, pour tout entier $n \geq 2$, de calculer rapidement la somme $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

4. La même méthode permet de démontrer les résultats suivants, que l'on admettra : pour tout entier $n \geq 2$

   $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ puis : $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{1}{5}n^5 + \dfrac{1}{2}n^4 + \dfrac{1}{3}n^3 - \dfrac{1}{30}n$

   En déduire un calcul donnant l'approximation du volume de la trompette obtenue en utilisant 160 cylindres.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries L, ES et STMG)

Tablettes de chocolat

Partie 1.

Karim a une tablette de chocolat, avec m carrés dans un sens et n dans l'autre, donc $m\times n$ carrés en tout.
On dira dans la suite qu'une telle tablette est de taille $m\times n$.
Pour préparer un gâteau, il veut découper sa tablette en petits carrés de taille 1×1.
Une découpe consiste à prendre un morceau et à le couper en deux.
Par exemple, si on a un morceau de taille 2×3, on peut le couper pour obtenir deux morceaux de taille 1×3, ou bien un morceau de taille 2×2 et un de taille 1×2.
On peut ensuite redécouper chacun de ces morceaux.

1. Combien de découpes sont nécessaires pour couper en carrés de 1x1 si la tablette est :
a) de taille 2×2? **b)** de taille 2×3? **c)** de taille 2×4?

2. Soit p un entier.
a) Combien de morceaux y a-t-il après p découpes?
b) En déduire que, pour tous m et n, il faut exactement $mn-1$ découpes pour couper en carrés de 1x1.

Partie 2.

Maintenant Karim utilise un couteau qui lui permet de couper plusieurs morceaux à la fois en les réalignant.
Par exemple si la tablette fait 1×4, il peut d'abord couper deux morceaux de 1×2, puis mettre ces morceaux l'un par-dessus l'autre pour couper les deux morceaux restants de taille 1×2 ensemble.
Il suffit donc de deux coupes dans cet exemple, au lieu de trois avant.

1. Combien de coupes suffisent pour couper en carrés de 1x1 :
a) une tablette de taille 1×8? **b)** une tablette de taille 1×16?

2. Montrer que pour couper une tablette de taille 1×2^k en carrés de 1x1, il suffit de k découpes.

3. Montrer que réciproquement, pour couper une tablette de taille 1×2^k en carrés de 1x1, un minimum de k découpes est nécessaire.

4. Quelle est la meilleure stratégie pour couper en carrés de 1x1 une tablette de taille $1\times n$?

5. Quelle est la meilleure stratégie pour couper en carrés de 1x1 une tablette de taille $2\times n$?

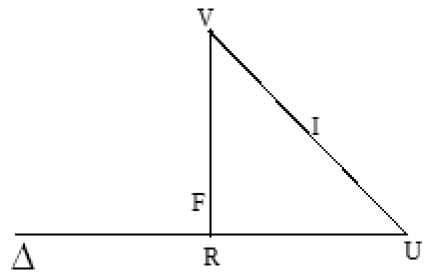
Exercice académique numéro 4 (à traiter par les candidats des séries STI2D et STD2A)

La parabole du jardinier

On rappelle que le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite Δ est le point d'intersection de la droite Δ avec sa perpendiculaire passant par M. Par définition, la distance de M à Δ notée d(M ; Δ) est la distance MH.

On donne une droite Δ et un point F non situé sur Δ.
R est le projeté orthogonal de F sur Δ.
On s'intéresse à Γ l'ensemble des points équidistants de F et de Δ.

U et V sont deux points situés respectivement sur Δ et sur la demi-droite [RF), tous deux à une distance 12 cm de R. I est le milieu de [UV].



1. a) Reproduire la figure avec RF = 2 cm.
b) Proposer trois points G, K et L appartenant à Γ.

On admet qu'il existe un unique point Ω situé sur Γ et [UV].

2. a) Comparer les distances UF et d(U ; Δ), VF et d(V ; Δ), IF et d(I ; Δ).
Sur quel segment semble être situé le point Ω ?
b) En déduire un processus itératif permettant de construire des points de plus en plus proches du point Ω.
c) Conjecturer alors l'allure de Γ.

3. On se place dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{R}; \vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{RF}}\right)$.
a) Montrer que si $(x; y)$ est le couple des coordonnées d'un point M
alors MF < d(M ; Δ) équivaut à $x^2 - 2y + 1 < 0$.
b) Proposer un algorithme permettant de calculer des valeurs approchées des coordonnées de Ω.
c) Indiquer les valeurs obtenues avec votre calculatrice.

Partie B

On se place désormais dans un repère orthonormal dans lequel le point F a pour coordonnées $(0; 1)$ et la droite Δ a pour équation $y = -1$.

1. Déterminer l'ordonnée du point de Γ d'abscisse 3 dans ce repère.
2. Montrer que dans ce repère la courbe Γ a pour équation $y = \frac{1}{4}x^2$.

On note *a* un réel quelconque, A le point de coordonnées $\left(a; \frac{1}{4}a^2\right)$ et H son projeté orthogonal sur Δ.

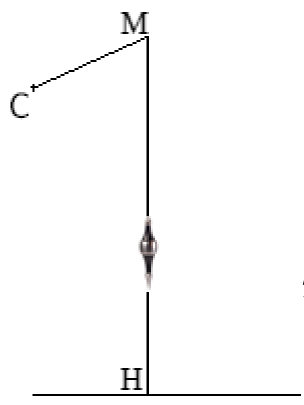
3. Montrer que le milieu de [FH] est sur la tangente t à Γ en A.

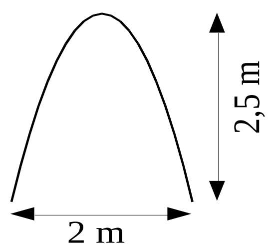
a) t coupe Δ en T. Montrer que $\widehat{\mathrm{FAT}} = \widehat{\mathrm{TAH}}$.

b) Cette propriété est à l'origine des paraboles permettant de capter les signaux de certaines chaînes de télévision. Expliquer pourquoi.

Partie C

Un jardinier souhaite tracer un arc de parabole sur un mur pour installer un tuteur permettant de guider un rosier grimpant.
Il plante un clou en C à une hauteur de *a* cm. Le point H glisse sur un rail horizontal.
Une ficelle de longueur fixe ℓ, attachée en C, passe en un point M et rejoint le point mobile H en suivant un fil à plomb.
Pour chaque position du point H, un crayon marque la position de M.





1. Montrer que le crayon dessine un arc de parabole.
2. Comment choisir *a* et ℓ pour que la hauteur de l'arc de parabole mesure 2,5 m et que sa base mesure 2 m ?