MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Grenoble

Mercredi 16 mars de 8h à 12h10

Pause de 10h00 à 10h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.**

Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 2 (*Liber abaci*),

Les candidats des autres séries traitent les exercices 1 (*Échanges thermiques*) et 3 (*Demi-tour !*)

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Échanges thermiques

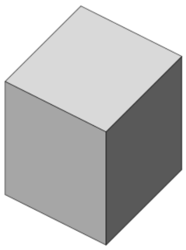
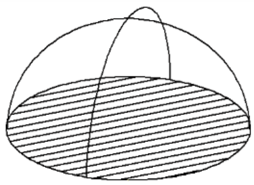
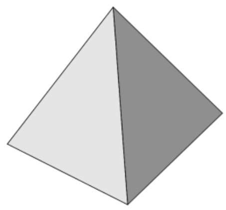
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m^2*, à son volume, mesuré en* m^3*. Le facteur de compacité* $c = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, *donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a, et de hauteur verticale a.

d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z .

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geq 3.$$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Liber abaci

Il y a 4000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui, encore ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. Un algorithme. Soient p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0;1[$

Poser $k = 1$, $p_1 = p$, $q_1 = q$.
Tant que $p_k \neq 0$

> Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$.
>
> Poser $p_{k+1} = p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1} = q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k}$.
>
> Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.

Fin du Tant que.

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q} = \frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k = 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 17$. On détermine alors $n_1 = 5$. Puis $p_2 = 3$, $q_2 = 85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?

b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du *N*-ième tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1202).

L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

3. Et pour $\frac{p}{q} \geq 1$?

a. L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\frac{p}{q} > 1$?

b. Soit a un entier supérieur ou égal à 3.

Justifier que : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\dots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\dots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a} > 1$

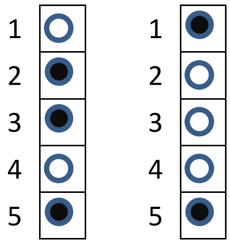
c. En déduire qu'il existe un entier naturel $b > a$ tel que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leq 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\dots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}.$$

d. Établir alors que tout rationnel $\frac{p}{q} \geq 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Demi-tour !



Avant Après

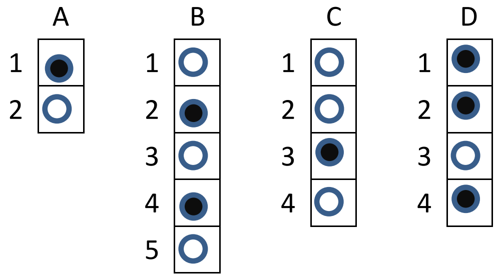
On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n,. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite– on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus.** Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?

2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?

3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-contre.



4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :

Pour k allant de n à 1 par pas de -1

  Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton

Fin Pour

a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?

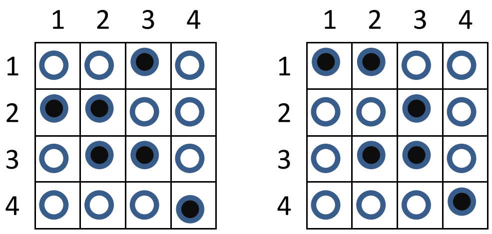
b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en en proposant des variantes :

a. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.

b. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne et le n°1 et le n° n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qui soit impossible à blanchir.

6. Jeu à deux dimensions.



Avant Après

On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une *opération* est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton (i, j), on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton $(1, 1)$ et le coin inférieur droit est le jeton (i, j) : tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés.** L'exemple ci-dessus montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4 x 4.

Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.**

Les candidats de la série S traitent les exercices 1 (*Taxis à Mathville*) et 2 (*Accepter les différences*),

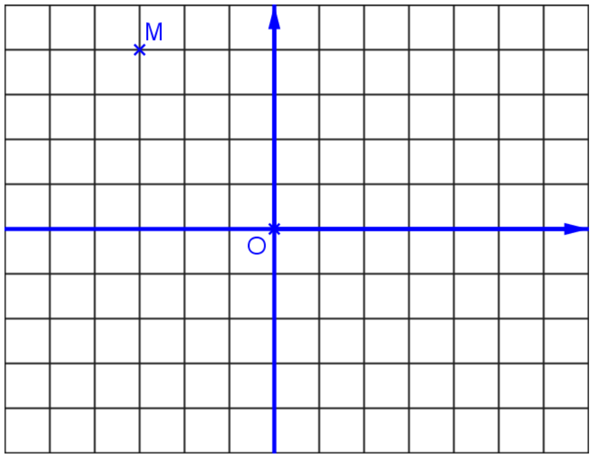
Les candidats des autres séries traitent les exercices 1 (*Taxis à Mathville*) et 3 (*Nombres prisonniers*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Taxis à Mathville

A Maths-City, les rues se coupent à angle droit en formant un quadrillage régulier.
L'unité de longueur est la longueur du côté d'un carré de ce quadrillage.

Dans cette ville, chaque point est repéré par ses coordonnées dans un repère dont l'origine est le point O, situé au centre de la ville.
Les axes de ce repère sont les des rues qui se coupent au point O, orientées comme indiqué sur la figure ci-contre.



Pour calculer la distance d'un point à un autre en suivant les rues, on utilise alors une distance particulière : la taxi-distance, ce qui conduit à une curieuse taxi-géométrie étudiée dans ce problème.
La taxi-distance entre deux points A et B est la plus courte distance que devrait parcourir un taxi pour aller de A à B, c'est-à-dire la distance parcourue en suivant les rues. On pourra noter cette distance $t(A, B)$.

1. a. Le musée des mathématiques se situe au point $M(-3\,;4)$

Vérifier que la taxi-distance de ce point à l'origine du repère est égale à 7.

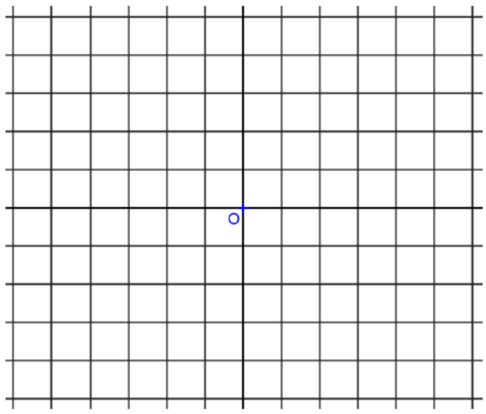
b. Plus généralement, quelle est la taxi-distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$?

2. Un taxi cercle

On appelle taxi-cercle de centre O et de rayon R (R est un nombre entier positif) l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance égale à R du point O.

On appelle taxi-disque l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance inférieure ou égale à R du point O.

a. Reproduire la figure ci-jointe et représenter :
- en vert le taxi-cercle de centre O et de rayon 5,
- en rouge les points du taxi-disque de centre O de rayon 5 situés à une distance paire du point O,
- en bleu les points du taxi-disque de centre O de rayon 5 situés à une distance impaire du point O.



b. Quel est le nombre de points d'un taxi-cercle de rayon R ?

c. Quel est le nombre de points d'un taxi-disque de rayon R ?

3. Taxi-médiatrices

On appelle taxi-médiatrice d'un couple de points $(A\,;B)$ l'ensemble des points du quadrillage situés à égale taxi-distance des points A et B.

a. Placer au moins 5 points de la taxi médiatrice de $(A\,;B)$ lorsque $A(0\,;\,-1)$ et $B(1;2)$.

b. Evariste habite un point du quadrillage situé à égale taxi-distance de deux points U et V.
Pourquoi peut-on alors affirmer que la taxi-distance de U à V est paire ?

c. Des points C et D sont tels que $x_C = y_D$ et $x_D = y_C$. Déterminer la taxi-médiatrice de $(C\,;D)$.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Accepter les différences !

Dans cet exercice la notation min désigne le plus petit nombre de la liste des nombres considérés.
Ainsi $\min(5;7) = 5$ et $\min(8;11;7) = 7$.

À partir de deux entiers positifs $x_1$et $x_2$distincts, on calcule successivement $x_3 = |x_2 - x_1|$,
puis $x_4 = \min(|x_3 - x_1|;|x_3 - x_2|;|x_2 - x_1|)$ puis pour $k \geq 4$, $x_k = \min(|x_j - x_i|;0 < i < j < k)$.

Ainsi avec $x_1 = 23$ et $x_2 = 49$, on obtient $x_3 = 26$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3$ et $x_6 = 0$.
Pour cette séquence on notera $23;49 \rightarrow 23 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 0$. On dit que sa longueur est 6.

La longueur d'une séquence est le rang de son premier terme nul.

1. Construire la séquence obtenue avec $x_1 = 50$ et $x_2 = 30$ puis celle correspondant à $x_1 = 50$ et $x_2 = 31$.

2. Construire une séquence de longueur 7.

3. Montrer que quel que soit $x_1 > 0$ on peut trouver $x_2 > 0$ tel que la séquence obtenue soit de longueur 5.

4. Démontrer que quels que soient les entiers strictement positifs $x_1$et x_2, il existe un entier *n* tel que $x_n = 0$.

5. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a. Écrire un algorithme qui permet de construire une séquence de longueur *n* donnée.

b. Écrire la séquence obtenue pour $n = 13$.

6. Trouver la séquence la plus longue possible avec $x_2 < x_1 \leqslant 1000$.

7. Soit $x_1 = 2016$.
Trouver la valeur de $x_2$tel que $x_2 < x_1$pour que la séquence soit la plus longue possible.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Nombres prisonniers

Dans tout cet exercice, les nombres considérés sont des nombres entiers positifs non nuls. De plus, lorsque l'on considère un nombre à plusieurs chiffres, le chiffre de gauche n'est jamais nul.

On dira qu'un nombre A est ***prisonnier*** du nombre B si on peut obtenir le nombre A en éliminant éventuellement certains chiffres de B.

Ainsi, 13 est prisonnier de 153 (en rayant le chiffre 5),
105 est prisonnier de 31056 (en rayant les chiffres 3 et 6),
15 est prisonnier de 15 (sans rayer de chiffre)
23 a trois prisonniers : 2; 3 et 23.
22 a deux prisonniers : 2 et 22.
alors que 11 n'est pas prisonnier de 15 et que 13 n'est pas prisonnier de 351.

1. Nombre de prisonniers d'un entier.

a. Quels sont tous les nombres à deux chiffres qui ont exactement deux prisonniers ?
b. Quels sont tous les nombres à deux chiffres qui ont exactement trois prisonniers ?
c. Quels sont tous les prisonniers de 203 ?
d. Existe-t-il des nombres à trois chiffres qui ont huit prisonniers distincts ?
e. Parmi les nombres à cinq chiffres non nuls, quels sont ceux qui ont le moins de prisonniers ? Combien ont-ils de prisonniers ?
f. Parmi les nombres à cinq chiffres non nuls, quels sont ceux qui ont le plus de prisonniers ? Combien ont-ils de prisonniers ?

2. Relations entre prisonniers.

a. Démontrer que si A est prisonnier de B alors A est inférieur ou égal à B.
b. Démontrer alors que si A est prisonnier de B et B prisonnier de A alors ces nombres sont égaux.
c. Si A est prisonnier de B et B prisonnier de C, que peut-on en déduire concernant A et C ?
d. Existe-t-il au moins un nombre non nul A tel que A soit prisonnier de (3A) ?
e. Existe-t-il au moins un nombre non nul A tel que A soit prisonnier de (2A) ?

3. Gardien d'un ensemble de nombres.

On appelle gardien d'un ensemble E de nombres un nombre G tel que tout nombre de l'ensemble E est prisonnier de G.

a. Construire un gardien de l'ensemble {21 ; 26 ; 201 ; 206}.
Ce gardien est-il unique ?
b. Montrer que tout ensemble fini de nombres a un gardien qui est plus petit que les autres.