Accepter les différences !

Dans cet exercice la notation min désigne le plus petit nombre de l'ensemble considéré.
Ainsi $\min(5;7) = 5$ et $\min(8;11;7) = 7$.

À partir de deux entiers positifs $x_1$et $x_2$distincts, on calcule successivement $x_3 = |x_2 - x_1|$,
puis $x_4 = \min(|x_3 - x_1|;|x_3 - x_2|;|x_2 - x_1|)$ puis $x_k = \min(|x_j - x_i|;0 < i < j < k)$.

Ainsi avec $x_1 = 23$ et $x_2 = 49$, on obtient $x_3 = 26$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3$et $x_6 = 0$.
Pour cette séquence on notera $23 - 49 - 26 - 3 - 3 - 0$. On dit que sa longueur est 6.

La longueur d'une séquence est le rang de son premier terme nul.

1. Construire la séquence obtenue avec $x_1 = 50$ et $x_2 = 30$ puis celle correspondant à $x_1 = 50$ et $x_2 = 31$.
2. Construire une séquence de longueur 7.
3. Montrer que quel que soit $x_1 > 0$ on peut trouver $x_2 > 0$ tel que la séquence obtenue soit de longueur 5.
4. Démontrer que quels que soient les entiers strictement positifs $x_1$et x_2, il existe un entier *n* tel que $x_n = 0$.
5. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a) Écrire un algorithme qui permet de construire une séquence de longueur *n* donnée.
b) Écrire la séquence obtenue pour $n = 13$.

6. Trouver la séquence la plus longue possible avec $x_2 < x_1 \leqslant 1000$.
7. Soit $x_1 = 2016$. Trouver la valeur de $x_2$tel que $x_2 < x_1$pour que la séquence soit la plus longue possible.

Éléments de correction

1. $50 - 30 - 20 - 10 - 10 - 0$ et $50 - 31 - 19 - 12 - 7 - 5 - 2 - 2 - 0$.

2. On peut considérer $20 - 13 - 7 - 6 - 1 - 1 - 0$ ou $8 - 5 - 3 - 2 - 1 - 1 - 0$.

3. Pour $x_1 > 1$, on pose $x_2 = x_1 + 1$, la séquence $x_1 - (x_1 + 1) - 1 - 1 - 0$ est de longueur 5.
Sinon la séquence $1 - 3 - 2 - 1 - 0$convient.

4. On peut remarquer que pour tout k entier naturel supérieur ou égal à 3 :
$x_{k+1} = \min(|x_j - x_i|;0 < i < j < k + 1) = \min(x_k;\min(|x_k - x_i|;0 < i < k)) \leqslant x_k$.
La suite (x_k) est à termes positifs et ne prend que des valeurs entières : elle ne peut donc être strictement décroissante. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_{k+1} = x_k$, mais alors $x_{k+2} = 0$.

5. a)

```
      Variables :a, b c, n sont des entiers
         Entrée :Lire n
 Initialisation : a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 1
     Traitement :Afficher a, b
                  Pour i allant de 1 à n – 2 faire
                      c prend la valeur de a + b
                      a prend la valeur de b
                      b prend la valeur de c
                      Afficher c
                  Fin pour
```

b) $0 - 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 233$

6. Supposons que la séquence soit de longueur $n \geqslant 5$, on a alors :
$x_1 \geqslant x_4$et $x_2 \geqslant x_4$et $x_n = 0$et $x_3 > x_4 > \cdots > x_{n-3} > x_{n-2} = x_{n-1}$.
On a vu dans la question 4. que pour tout $k \geqslant 3$, on a
$x_{k+1} = \min(|x_j - x_i|;0 < i < j < k + 1) = \min(x_k;\min(|x_k - x_i|;0 < i < k)) \leqslant x_k$.
Donc si $k \geqslant 5$ alors $x_{k+1} = \min(x_k, x_{k-1} - x_k)$.
Pour que la séquence soit de longueur $n + 1$, il faut que $x_{n-1} = x_{n-3} - x_{n-2}$donc $x_{n-3} = x_{n-2} + x_{n-1}$.
On reconnaît la suite de Fibonnacci. On écrit alors $89 - 144 - 233 - 377 - 610 - 987$.
La réponse est donc $x_1 = 987$et $x_2 = 610$.
La séquence contient alors 17 termes.

7) On a :
$2016 > x_2 > 2016 - x_2 > 2x_2 - 2016 > 2*2016 - 3x_2 > 5x_2 - 3*2016 > 5*2016 - 8x_2 > 13x_2 - 8*2016 > 13*2016 - 21x_2 > 34x_2 - 21*2016 > 34*2016 - 55x_2 > 89x_2 - 55*2016 \ldots$
Ces nombres sont strictement positifs : On obtient des encadrements de x_2 d'amplitude de plus en plus petite.
$34x_2 - 21 \times 2016 > 0 \Leftrightarrow x_2 > \frac{21\times2016}{34} \approx 1245{,}18$et $34 \times 2016 - 55x_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 < \frac{34\times2016}{55} \approx 1246{,}25$.
$x_2$étant entier, on a $x_2 = 1246$.
La séquence est alors :
$2016 - 1246 - 770 - 476 - 294 - 182 - 112 - 70 - 40 - 28 - 12 - 6 - 6 - 0$.