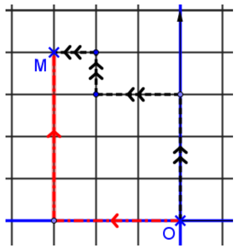
Taxis à Maths-City !

Éléments de correction

1 – a) Le musée des mathématiques se situe au point M(-3 ; 4).
Vérifier que la taxi-distance de ce point au point O est égale à 7.



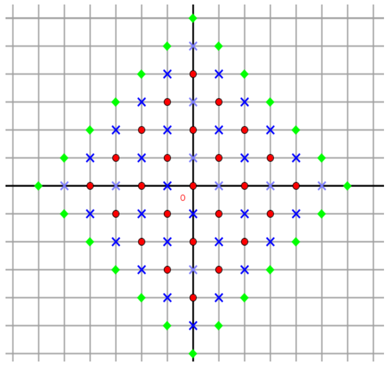
Il existe plusieurs chemins qui réalisent la plus courte taxi-distance :
pour chacun d'entre-eux, il y a au total 3 déplacements horizontaux et 4 déplacements verticaux, on a alors $t(O\,;M)=3+4=7$

b) Plus généralement, quelle est la taxi-distance entre deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B;\,y_B)$?

Si on note x le plus grand (resp x' le plus petit) des deux nombres x_A et x_B , les plus courts chemins du point A au point B sont ceux qui comportent x-x' déplacements horizontaux et y-y' déplacements verticaux, la taxi-distance est alors (x – x') + (y – y'),
ce qui peut s'écrire : $t(A\,;B)=|x_B-x_A|+|y_B-y_A|$

2 – Un taxi-cercle.

On appelle taxi-cercle de centre O et de rayon R (R nombre entier positif) l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance égale à R du point O, et taxi-disque l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance inférieure ou égale à R du point O.



a) Reproduire la figure ci-jointe et représenter
- en vert le taxi-cercle de centre O et de rayon 6.
- en rouge les points du taxi-disque centre 0 de rayon 5 situés à une distance paire du point O.
- en bleu les points du taxi-disque centre 0 de rayon 5 situés à une distance impaire du point O.

b) Quel est le nombre de points d'un taxi-cercle de rayon R ?

Un taxi-cercle de rayon R est l'ensemble des points à coordonnées entières d'un carré de centre O.
Il y a sur chacun des côtés R+1 points, soit au total 4(R+1) – 4 = 4R points.

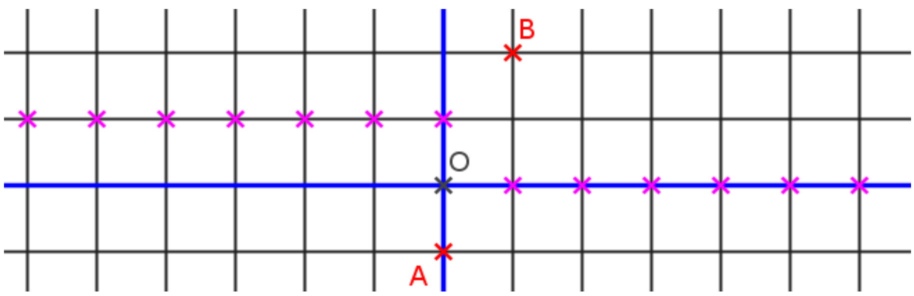
c) Quel est le nombre de points d'un taxi-disque de rayon R ?

En observant la figure précédente, on constate qu'il y a dans ce taxi-disque $(R+1)^2$ points bleu et R^2 points rouges, soit au total $2R^2 + 2R + 1$ points.
On peut aussi ajouter le nombres de points des différents taxi-cercles inclus dans le taxi-disque, ce qui fait N = 4R + 4(R-1) … + 4 +1, Il reste alors à calculer la somme de termes d'une suite arithmétique.

3 – Taxi-médiatrices.

On appelle taxi-médiatrice d'un couple de points (A ; B) l'ensemble des points du quadrillage situés à égale taxi-distance des points A et B.

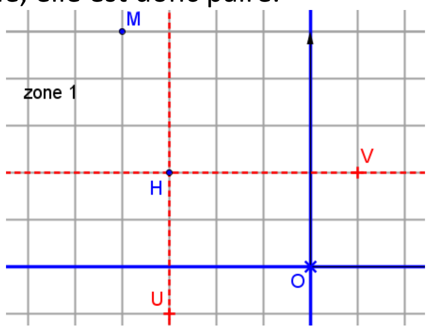
a) Placer au moins 5 points de la taxi-médiatrice de (A; B) lorsque A(0;-1) et B(1;2).



En rose sur la figure ci-dessus les points du quadrillage qui font partie de la taxi-médiatrice.

b) Évariste habite un point du quadrillage situé à égale taxi-distance de deux points U et V. Pourquoi peut-on alors affirmer que la taxi-distance de U à V est paire ?

Si les points U et V sont confondus alors la taxi-distance de U à V est nulle, elle est donc paire.



Soit M(x ; y) le lieu de résidence d'Evariste : $t(U;M)=t(V;M)$.

Supposons dans un premier temps que $x_U \leq x_V$ et $y_U \leq y_V$,
Soit H le point de coordonnées $(x_U ; y_V)$, le chemin UH-HV est l'un des chemins les plus courts de U à V, on a alors

$$t(U;V)=t(U;H)+t(H;V)$$

pour la même raison si M (point de la zone 1 du quadrillage,
$t(U;M)=t(U;H)+t(H;M)$ et $t(V;M)=t(V;H)+t(H;M)$
on en déduit que $t(U;M)=t(V;M)$ équivaut à $t(U;H)=t(V;H)$
il en résulte que $t(U;V)=2t(U;H)$ qui est donc un entier pair.

Les autres cas de figure se traiteraient de façon analogue, pour aboutir dans chaque cas à la parité de la la taxi-distance de U à V .
Conséquence : La taxi-médiatrice d'un couple de points à taxi-distance impaire l'un de l'autre est vide !

c) Des points C et D sont tels que $x_C=y_D$ et $x_D=y_C$. Déterminer la taxi-médiatrice de (C; D).

Remarquons que $t(C;D)=|x_D-x_C|+|y_D-y_C|=|x_D-y_D|+|y_D-x_D|=2|x_D-y_D|$
cette distance est paire, il se peut donc que la taxi-médiatrice ne soit pas vide.

Un point M(x;y) un point du quadrillage.
M est sur la taxi-médiatrice de (C; D) si et seulement si $|x-x_C|+|y-y_C|=|x-x_D|+|y-y_D|$
ce qui équivaut à $|x-x_C|+|y-y_C|=|x-y_C|+|y-x_C|$ (1)
- si $x \geq max(x_C ; y_C)$ et $y \geq max(x_C ; y_C)$
alors (1) équivaut à $x-x_C+y-y_C=x-y_C+y-x_C$ ce qui est toujours vrai
ainsi, tout point de ce quart de plan est un point de la taxi-médiatrice.
- Il en est de même pour le quart de plan défini par : $x \leq max(x_C ; y_C)$ et $y \leq max(x_C ; y_C)$
- les autres points de la taxi-médiatrice sont les points tels que $max(x_C ; y_C) \leq x=y \leq max(x_C ; y_C)$

On peut alors représenter la taxi-médiatrice de (U;V) :