MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

# Olympiades académiques de mathématiques

## Académie de …..

### Mercredi 18 mars de …heures à …heures

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

***Durée de la composition : 4 heures***

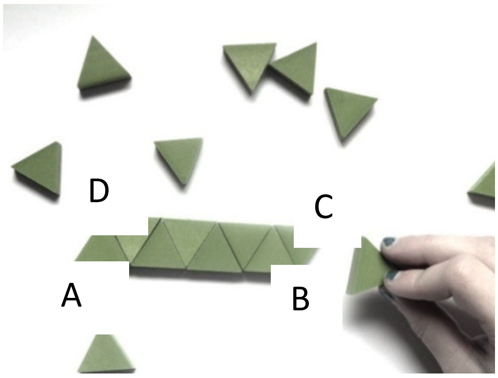
Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de … heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

# Exercice numéro 1

*(proposé par le jury national)*

## Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.




Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.

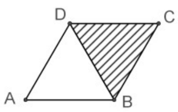
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- $L$ = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- $l$ = BD la longueur de la diagonale [BD].

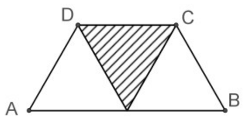
**Partie A**

**1.** Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

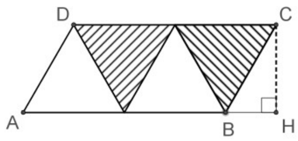
**2.** Calculer les longueurs $l$ et $L$ pour les cas suivants :



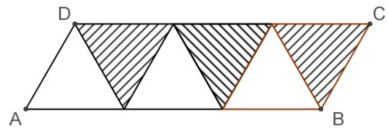

*Deux triangles*




*Trois triangles*




*Quatre triangles*




*Six triangles*

**Partie B**

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note $n$ le nombre de triangles équilatéraux alignés ( $n$ est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

**1.** Lorsque le nombre $n$ de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L=\sqrt{p^2+p+1}, \text{où } p=\frac{n}{2}$ .

**2.** Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs $l$ et $L$ ?

**3.** Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs $l$ et $L$ calculées par Léa.

**Partie C**

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

***1<sup></sup>re propriété*** : « Pour tout nombre $n$ de triangles juxtaposés, $L$ est la racine carrée d'un nombre impair »

***2e propriété*** : « Pour tout nombre $n$ de triangles juxtaposés, $L$ est la racine carrée d'un nombre premier »

*On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.*

**1.** Valider ou invalider chacune de ces propriétés.
**2.** Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

**3.** Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2015}$ ?

**4.** Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1015057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
**5.** Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

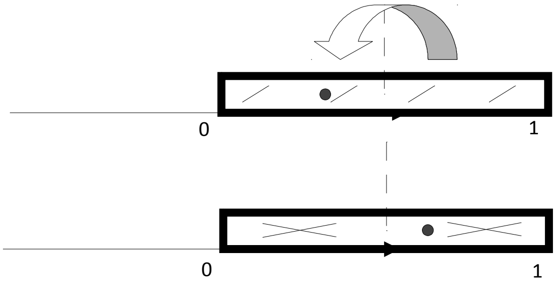
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

## Exercice numéro 2

***(proposé par le jury national)***

## On est les rois !

Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.




### Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction *f* définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=2x \quad \text{si} \quad x\le\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x)=2(1-x) \quad \text{sinon.}$$

**1.** Montrer que l'image par *f* d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].

**2.** Justifier pourquoi cette fonction $f$ modélise le déplacement de la fève.

### Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par $f$ d'un élément $x$ de $[0,1]$ sont notées $x_1=f(x), x_2=f(x_1), x_3=f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse $x$.

**1.** Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$ ? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.

**2.** Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse $x$, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de $x$ pouvant répondre à la question.

**3.** Quand une fève placée à l'abscisse $x$ vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « $x$ atteint sa cible ». Donner un exemple où $x$ atteint sa cible, et un autre où $x$ ne l'atteint pas.

**4.** Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

**5.** Déterminer tous les nombres de $[0,1]$ atteignant leur cible.

**Partie C – Étude d'un algorithme.**

**1.** Soit un nombre $x$ dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

**2.** D'après les question **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x=\frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x=\frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x=0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

**Annexe.**

| |
|---|
| **Variables**<br>$x$ est un élément de $[0,1]$<br>**Début**<br>**Saisir** le nombre $x$ compris entre 0 et 1<br>**Tant que** $x \neq 0$ **faire**<br>**Si** $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**<br>$x$ **prend la valeur** 2 $x$ |

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

## Exercice numéro 3

***(proposé par le jury académique)***

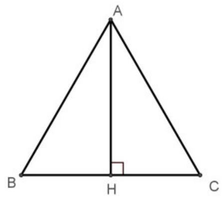
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

## Exercice numéro 4

***(proposé par le jury académique)***

## Défi entre sœurs

## Éléments de solution

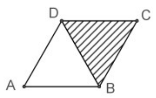
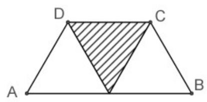
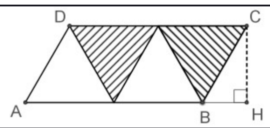
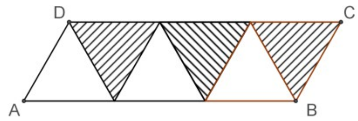


### Partie A

**1.** La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC est un des côtés de l'angle droit du triangle AHB. D'après le théorème de Pythagore AH² = AC² − CH². AC = 1 et CH = $\frac{1}{2}$ .

Donc AH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**2.** Calcul des longueurs des diagonales

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| *Deux triangles* | *Trois triangles* | *Quatre triangles* | *Six triangles* |
| La plus petite des diagonales a pour longueur 1, la plus grande deux fois la longueur de la hauteur du triangle, soit $\sqrt{3}$ | Trapèze isocèle : les deux diagonales ont la même longueur, celle de la plus grande diagonale du cas précédent | Le triangle ACH rectangle en H fournit, grâce au théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale [AC] : AC² = AH² + CH² AC² = 6,25 + 0,75. D'où AC = $\sqrt{7}$ . La plus petite diagonale est la diagonale du cas précédent. | La plus petite diagonale est la plus grande du cas précédent. Pour la plus grande, on calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle ACJ, rectangle en J, projeté orthogonal de C sur (AB). AB² = 10,5 + 0,75, d'où AB = $\sqrt{23}$ |

### Partie B

**1.** Lorsque le nombre *n* de triangles est **pair**, on pose *n = 2p,* la plus grande des diagonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $p+\frac{1}{2}$ et l'autre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$L^2=p^2+p+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ donne le résultat demandé.

**2.** Lorsqu'on ajoute un triangle, la figure obtenue est un trapèze isocèle dont les diagonales ont toutes les deux la longueur $L$ .

**3.** Dans le cas d'un parallélogramme constitué de 56 triangles, selon la question **1.** de cette partie, $L=\sqrt{813}$ et $l=\sqrt{757}$ .

### Partie C

**1.** Le nombre *p*² + *p* (égal à *p*(*p* + 1)) est en effet un nombre pair. Son successeur est impair.
En revanche, 7² + 7 + 1 = 57, multiple de 3…

**2.** $\sqrt{2}$ , racine d'un nombre premier pair, ne peut figurer dans la suite des longueurs possibles. Cette suite est par construction croissante et $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ en sont deux termes consécutifs.

**3.** La question est : existe-t-il un entier naturel *p* solution de l'équation $p^2+p+1=2015$ ? Cette équation s'écrit $\left(p+\frac{1}{2}\right)^2=2014{,}25$ et 2 014,25 n'est le carré d'aucun décimal. La réponse est donc non.

**4.** 1 015 056, 25 est le carré de 1 007,5. L'équation $\left(p+\frac{1}{2}\right)^2=1015056{,}25$ a donc deux solutions, 1 007 et – 1 008. Une seule répond au problème, ce sont 2 014 triangles qu'il faut aligner pour l'obtenir.

**5.** Quelques essais semblent confirmer cette tendance : 0,9 est dépassé dès la première différence, 0,99 à la sixième.

| *p* | *L*(*p* + 1) | *L*(*p*) | Différence |
|---|---|---|---|
| 1 | 2,645751311 | 1,732050808 | 0,913700503 |
| 2 | 3,605551275 | 2,645751311 | 0,959799964 |
| 3 | 4,582575695 | 3,605551275 | 0,977024419 |
| 4 | 5,567764363 | 4,582575695 | 0,985188668 |
| 5 | 6,557438524 | 5,567764363 | 0,989674161 |
| 6 | 7,549834435 | 6,557438524 | 0,992395911 |

Seule une démonstration pourra le confirmer. Calculons donc :

$$L(p+1)-L(p)=\sqrt{p^2+3p+3}-\sqrt{p^2+p+1}$$

Ou encore : $L(p+1)-L(p)=\dfrac{\left(\sqrt{p^2+3p+3}\right)^2-\left(\sqrt{p^2+p+1}\right)^2}{\sqrt{p^2+3p+3}+\sqrt{p^2+p+1}}$

Et enfin : $L(p+1)-L(p)=\dfrac{2+\frac{2}{p}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{p}+\frac{3}{p^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}\right)}$

Où l'on voit que, pour les « grandes » valeurs de *p* (elles n'ont pas besoin d'être si grandes que cela, d'ailleurs), le numérateur comme le dénominateur de ce quotient ne cessent de se rapprocher de 2 ; le quotient est donc proche de 1.

## On est les rois !
## Éléments de solution

### Partie A

**1.** Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$. Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent.

**2.** L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est « étiré » sur l'intervalle [0, 1], l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est « replié » sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis lui aussi « étiré ».

### Partie B

**1.** Les neuf images successives de ces deux nombres sont données dans le tableau :

| $x$ | $x_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 0, 33 | 0, 66 | 0, 68 | 0, 64 | 0, 72 | 0, 56 | 0, 88 | 0, 24 | 0, 48 | 0, 96 | 0, 08 | 0, 16 |

Les images successives de $\frac{1}{3}$ se stabilisent rapidement, celles de 0, 33 ne se stabilisent pas (le 0, 16 prédit cependant le retour de 0, 64 et donc un cycle). À droite, les premières images engendrées par 0, 6666666 confirment cette dispersion, plus lente.

**2. -** La fève ne change pas de position : l'équation $f(x) = x$ a pour solutions 0 (dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ) et $\frac{2}{3}$ (dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ).

**-** La fève revient à sa position initiale après deux opérations : on est amené à discuter en découpant l'intervalle [0, 1] en quatre. L'équation $f(f(x)) = x$ a pour solutions $\frac{2}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\frac{4}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. On élimine 0 et $\frac{2}{3}$, qui sont naturellement réapparus.

**-** La fève revient à sa position initiale après trois opérations. Le tableau ci-dessous permet de suivre la discussion (on n'a pas dressé le tableau correspondant à la situation précédente…)

0,66666666
0,66666668
0,66666664
0,66666672
0,66666656
0,66666688
0,66666624
0,66666752
0,66666496
0,66667008
0,66665984
0,66668032
0,66663936
0,66672128
0,66655744
0,66688512
0,66622976
0,66754048
0,66491904
0,67016192
0,65967616
0,68064768
0,63870464
0,72259072
0,55481856
0,89036288
0,21927424
0,43854848
0,87709695

…

| Intervalle | $\left[0,\frac{1}{8}\right]$ | $\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$ | $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right]$ | $\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right]$ | $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right]$ | $\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right]$ | $\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right]$ | $\left[\frac{7}{8},1\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Écriture de $f(x)$ | $2x$ | $2x$ | $2x$ | $2x$ | $2(1-x$ | $2(1-x$ | $2(1-x$ | $2(1-x$ |
| Intervalle contenant $f(x)$ | $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ | $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ | $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ | $\left[\frac{3}{4},1\right]$ | $\left[\frac{3}{4},1\right]$ | $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ | $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ | $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ |
| Écriture de $f(f(x))$ | $4x$ | $4x$ | $2-4x$ | $2-4x$ | $4x-2$ | $4x-2$ | $4-4x$ | $4-4x$ |
| Intervalle contenant $f(f(x))$ | $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ | $\left[\frac{1}{2},1\right]$ | $\left[\frac{1}{2},1\right]$ | $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ | $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ | $\left[\frac{1}{2},1\right]$ | $\left[\frac{1}{2},1\right]$ | $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ |
| Écriture de $f(f(f(x)))$ | $8x$ | $2-8x$ | $8x-2$ | $4-8x$ | $8x-4$ | $6-8x$ | $8x-6$ | $8-8x$ |
| Égalité à traiter | $7x=0$ | $9x=2$ | $7x=2$ | $9x=4$ | $7x=4$ | $9x=6$ | $7x=6$ | $9x=8$ |
| Solutions | exclu | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{7}$ | exclu | $\frac{6}{7}$ | $\frac{8}{9}$ |

On remarque que les six nombres solutions sont éléments de deux *cycles* :

$\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9}$ d'une part, $\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7}$ d'autre part.

**3.** Atteindre sa cible, pour un nombre non nul, c'est d'abord atteindre 1, puisque 1 est l'autre nombre de l'intervalle [0, 1] dont l'image par $f$ est 0. Tous les inverses des puissances entières de 2 atteignent leur cible (par doublement successif, puisqu'à chaque étape on obtient un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$ ). Le nombre $\frac{2}{3}$ , égal à toutes ses images successives, n'atteint pas sa cible.

**4.** Les images successives de $\frac{2015}{2^{2015}}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$ (elles sont obtenues par doublement successif) jusqu'à $\frac{2015}{2048}$ , qui est supérieur. L'image de ce nombre est $\frac{33}{1024}$ , dont les images sont encore inférieures à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{33}{64}$ , auquel succèdent $\frac{31}{32},\frac{1}{16},\frac{2}{16}$ , etc. jusqu'à $\frac{1}{2}$ et 1 puis 0.

**5.** En raisonnant sur les antécédents : 0 a comme antécédents lui-même et 1, 1 n'a comme antécédent que $\frac{1}{2}$ , celui-ci ayant comme antécédents $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ . On se donne un entier $n$ et un entier $p$ non nul inférieur à $2^n$ , et on cherche les antécédents de $\frac{p}{2^n}$ . Ce sont les solutions des équations

$\frac{p}{2^n}=2x$ ou $\frac{p}{2^n}=2(1-x)$. Il y en a deux, $\frac{p}{2^{n+1}}$, qui est inférieur à $\frac{1}{2}$, et $\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}$, qui lui est supérieur. Les prédécesseurs de 0 sont donc bien les quotients par une puissance de 2 des entiers inférieurs à cette puissance… et 0.

**Partie C**

**1.** On introduit une variable entière N, de valeur initiale 0. Avant la fin du **Tant que**, l'instruction N ← N+1 (Ou toute autre forme d'incrémentation) permet de compter le nombre d'itérations. Après la fin du **Tant que**, on donne une instruction d'affichage de N. Si le nombre introduit dans l'algorithme n'atteint pas la cible, l'algorithme ne s'arrête pas.

**2.** Le nombre 1/9 est à l'origine du cycle 2/9, 4/9, 8/9. L'algorithme tourne indéfiniment. Les images successives du nombre 1/9 subissent, de l'une à la suivante, des dégradations dues aux approximations inhérentes au calcul sur machine. Dans le tableau de droite, on voit que les images successives de 1/9, qui devraient être écrites 0,222222222 ; 0,444444444 et 0,888888888, perdent de la précision jusqu'à être « confondues » avec des rationnels de $[0,1]$ dont le dénominateur est une puissance de 2, ensemble dense dans $[0,1]$. (*)

Par ailleurs, on prend toujours un risque en posant une condition du type $x>0$ dans un programme d'ordinateur qui calcule sur des nombres en virgule flottante, mais ceci est une autre histoire.

| |
|---|
| 0,444444656 |
| 0,888889313 |
| 0,222221375 |
| 0,444442749 |
| 0,888885498 |
| 0,222229004 |
| 0,444458008 |
| 0,888916016 |
| 0,222167969 |
| 0,444335938 |
| 0,888671875 |
| 0,22265625 |
| 0,4453125 |
| 0,890625 |
| 0,21875 |
| 0,4375 |
| 0,875 |

(*) On pourra consulter les entretiens donnés par Sylvie Boldo sur https://interstices.info/jcms/c_36153/pourquoi-mon-ordinateur-calcule-t-il-faux ?