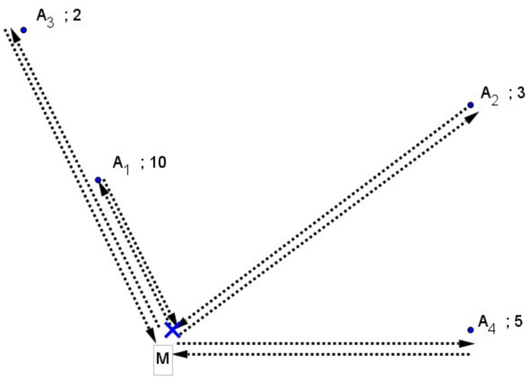
Des écolo-systèmes

Un ***écolo-système*** est un ensemble de couples $\{(A_i;\alpha_i),1\le i\le n\}$ où A_i est un point du plan, α_i un entier naturel correspondant au nombre d'aller-retours entre ce point et le point de départ.
A chaque point de départ M du plan, on associe alors ***le trajet total*** $T(M)$ correspondant à l'écolo-système.
Une solution pour l'écolo-système est un point S tel que la fonction T soit minimale en S .
Résoudre un écolo-système, c'est trouver l'ensemble des solutions à cet écolo-système.



Dans l'exemple ci contre,

$T(M)=2\times M\,A_3+2\times A_3M\quad +10\times M\,A_1+10\times A_1M$
$+3\times M\,A_2+3\times A_2M\quad +5\times M\,A_4+5\times A_4M$

Partie A :

Soient A et B deux points du plan tels que $AB=9$.
On considère l'écolo-système $\mathscr{A}=\{(A;5);(B;4)\}$
1) On place M sur $[AB]$ tel que $AM=4$.
   a) Calculer $T(M)$
      T(M) = 5 × 4 × 2 + 4 × 5 × 2 = 80
   b) Pensez vous que ce point de départ M soit un point solution pour l'écolo-système $\mathscr{A}$?
      Non, il est possible de diminuer T(M) :
      si l'on place M en A : T(M) = 4 × 9 × 2 = 72

2) Soient C et D deux points quelconques du plan et a et b deux entiers naturels quelconques.
On considère l'écolo-système $\mathscr{B}$ = $\{(C;a);(D;b)\}$

a) Démontrer que si M est solution de $\mathscr{B}$, alors M est nécessairement sur le segment $[CD]$.
   Si M n'est pas sur sur le segment $[CD]$, alors il suffit de le projeter sur le segment ou sur celle des extrémités qui est la plus proche pour obtenir un point H tel que $T(H)<T(M)$, M n'est donc pas une solution de l'écolo-système.
   Une solution de l'écolo-système est donc nécessairement un point du segment.

b) Résoudre alors $\mathscr{B}$
   Soit M un point du segment [CD], notons x la distance CM.
   On a alors $T(M)=2\times x\times a+2\times(CD-x)\times b=2(a-b)x+2\times CD$.
   - Si a = b alors pour tout point M de [CD], on a $T(M)=2\times CD$,
   tout point du segment est alors solution.
   - Si a < b alors a-b<0, donc $T(M)$ est minimal lorsque x est maximal, soit x = CD
   le point D est donc la solution du problème.
   - Si a > b, alors c'est le point C qui est solution.

Partie B :

Soient P, Q, R trois points du plan tels que $R \in [PQ]$, $PQ = 10$ et $PR = 12$.

On considère l'écolo-système $\mathscr{D} = \{(P;4);(Q;3);(R;2)\}$

On suppose que $M \in [PQ]$, et on pose PM = x.

a) exprimer $T(M)$ en fonction de x

on a alors pour $0 \leqslant x \leqslant 10$: $T(M) = 2 \times x \times 4 + 2 \times (10-x) \times 3 + 2 \times (12-x) \times 2 = 108 - 2x$

b) Résoudre $\mathscr{D}$.

Par le même raisonnement qu'à la partie A, on montre que les solutions du système sont nécessairement sur le segment [PR].

- Sur le segment [PQ], l'expression trouvée ci-dessus est minimale lorsque x est maximal, soit x = 10 c'est-à-dire pour le point Q.
- Sur le segment [QR], on trouve de même pour $10 \leqslant x \leqslant 12$ $T(M) = 10x - 12$ qui est minimal pour x = 0, soit à nouveau pour le point Q.

La solution de l'écolo-système $\mathscr{D}$ est donc le point Q.

Partie C :

Dans le plan repéré, on considère les points $A(1;0)$; $B(2;0)$; $C(2;0)$; $D(2;0)$; $E(2;0)$

Proposer une solution à l'écolo-système $\mathscr{E}$ = $\{(A;1);(B;2);\ldots;(E;5)\}$

Expliquer clairement le raisonnement.

Par analogie avec situations précédentes, il est clair qu'une solution se trouve nécessairement sur le segment [AE], on montre en procédant comme à la question précédente que T atteint son minimum lorsque le point M est en D. La solution de l'écolo-système $\mathscr{E}$ est donc le point D.

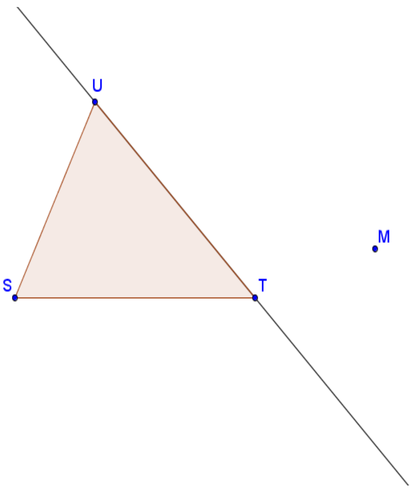
Partie D :

Soient S, T, U trois points non alignés du plan.

On considère l'écolo-système $\mathscr{F}$ $\{(S;a);(T;b);(U;c)\}$

où a, b et c sont trois entiers strictement positifs.

1) On suppose que M appartient au demi-plan de frontière (UT) ne contenant pas S. Quelle construction géométrique permet d'obtenir un point M' tel que $T(M') < T(M)$. Justifier.



N.B. On interprète ici demi-plan comme demi-plan ouvert.
Dans le cas contraire, nous ne sommes pas assurés de pouvoir diminuer la valeur de T(M).

Si M' est le symétrique du point M par rapport à la droite (UT), on a M'U=MU et M'T=MT, mais M'S<MS : en effet si I est le point d'intersection des droites (SM) et (UT)
MS = SI + IM = SI + IM' or dans le triangle SIM', SM' < SI + IM' car S, I et M' ne sont pas alignés.
On a alors T(M')<T(M).

2) Démontrer qu'un point solution au système se trouve nécessairement à l'intérieur du triangle STU.

On part d'un point M quelconque du plan, mais extérieur au triangle STU, par une succession de symétries axiales, on remplace à chaque étape le point M par un point M' tel que T(M')<T(M).

Il reste à prouver que l'on peut toujours tomber dans le triangle en un nombre fini d'étapes...