

Une réforme territoriale

Un pays comporte n régions. Pour des raisons d'économie, on décide de grouper ces régions deux par deux (une région, au maximum, sera laissée inchangée).

1 – On ne tient pas compte, dans cette question, de la situation géographique, c'est-à-dire que deux régions peuvent être regroupées même si elles sont éloignées.

a) De combien de façons peut-on effectuer ces regroupements pour $n=2$? $n=3$? $n=5$?

Notons A, B, C ... les régions.

- Dans le cas de deux régions A et B, le seul regroupement possible est {AB}.

- Dans le cas de trois régions, les regroupements sont {AB,C}, {AC,B} et {A,BC}, il y a donc trois regroupements possibles.

- Dans le cas de 4 régions, encore trois regroupements : {AB,CD}, {AC,BD} et {AD,BC}.

- S'il y a 5 régions,

soit A est laissée seule, et il y a 3 regroupements possibles pour les 4 autres

soit A est regroupée avec l'une des quatre autres régions, et il y a dans chaque cas 3 regroupements possibles pour les trois régions restantes

il y a donc $3 + 4 \times 3 = 15$ regroupements possibles.

b) Exprimer le nombre $r(n)$ de regroupements possibles en fonction du nombre n de régions.

- Pour n impair, on peut choisir la région qui restera seule (n choix possibles), puis regrouper les régions restantes 2 par 2, soit $r(n-1)$ regroupements.

On obtient ainsi $r(n) = n \times r(n-1)$.

- Pour n pair, on regroupe A avec l'une des $n-1$ autres régions, puis on regroupe les $n-2$ régions qui restent, soit $r(n) = (n-1) \times r(n-2)$.

c) Quel est le nombre de regroupements pour un pays comportant 22 régions ?

D'après ce qui précède, $r(22) = 21 \times r(20) = 21 \times 19 \times r(18) = 21 \times 19 \times 17 \times \dots \times 3 \times 1$

soit $r(22) = 13\,749\,310\,585$.

Il semble plus logique de n'envisager que les regroupements entre régions voisines... dans la suite, on ne regroupera que des régions ayant une véritable frontière commune, et non celles qui n'ont qu'un sommet commun.

2 – a) On suppose que la configuration est la suivante :

A	B	C
D	E	F

Quel est le nombre de regroupements possibles ?

On trouve 3 regroupements : {AB,CD,EF}, {AD,BC,EF} et {AD,BE,CF}.

b) Même question pour le pays modélisé ci-dessous :

A	B	C	D
E	F	G	H

Encore 3 regroupements : {AB,CD,EF,GH}, {AE,BC,FG,DH} et {AE,BF,CD,GH}.

3 – Le cas général étant compliqué, on supposera que le pays peut-être modélisé par une grille rectangulaire, de p lignes et q colonnes (p et q entier non nuls) , chacune des cases représentant une région. On notera alors $r(p;q)$ le nombre de regroupements possibles.

a) Déterminer $r(1;q)$ et $r(p;1)$.

- Si q est pair, il y a un seul regroupement possible : {AB,CD...}
- Si q est impair, les regroupements possibles sont {A,BC,DE...}, {AB,C,DE...}, {AB,CD, E...}... la région laissée seule peut être choisie parmi les régions de rang impair, on en déduit que $r(1; q) = (q+1)/2$.
- Il est clair d'autre part que pour tout entier non nul p, $r(p ;1) = r(1; p)$.

b) Déterminer $r(2;2)$, $r(2;3)$ et $r(2;4)$.

$r(2;2) = 2$ (horizontalement ou verticalement)

$r(2;3) = 3$ (question 2a)

Pour déterminer $r(2;4)$ on ajoute une colonne au tableau de la question 2a :

A	B	C	G
D	E	F	H

On peut alors

- regrouper les régions G et H, le nombre de tels regroupements est $R(2;3) = 3$
- regrouper G avec C et H avec F, il restera à regrouper les 4 régions des deux premières colonnes, le nombre de tels regroupements est $r(2;2) = 2$
- Il y a donc au total 5 regroupements : $r(2;4) = r(2;3) + r(2;2) = 5$.

c) Démontrer que pour tout entier q supérieur ou égal à 2, $r(2;q+1) = r(2;q) + r(2;q-1)$

La démarche est la même que ci-dessus : ajouter une colonne ...

d) Ecrire un algorithme permettant le calcul direct de $R(2;q)$, q étant un entier supérieur à 2.

Algorithme	Programme en XCas
<ul style="list-style-type: none"> - Demander à l'utilisateur un entier naturel supérieur ou égal à 4 et affecter ce nombre à q - Initialiser les variables s et t en leur affectant respectivement $R(2;2)$ et $R(2;3)$ - Répéter pour chaque entier k de 4 à q : <ul style="list-style-type: none"> r prend la valeur s + t s prend la valeur t t prend la valeur r - A la fin de la répétition, afficher r 	<pre> saisir(q); s:=2; t:=3; pour k de 4 jusque q faire r:=s+t; s:=t; t:=r; fpour; afficher(r); </pre>

Donner alors la valeur de $R(2;11)$: le programme affiche $r=144$.