Une drôle d'opération.

On considère l'ensemble des entiers ayant **au maximum** trois chiffres noté $\mathbb{N}_3$.
Tout nombre entier de $\mathbb{N}_3$ peut s'écrire sous la forme $100c+10d+u$ avec c,d et u les chiffres des centaines, dizaines et unités (ces trois chiffres pouvant être nuls ou non).
On définit sur cet ensemble une opération notée @ par
$(100c+10d+u)@(100c'+10d'+u')=cc'+dd'+uu'$.

Ainsi, $137@48=1\times 0+3\times 4+7\times 8=68$.

1. Calculer $104@38$.
   104 @38 =1×0 + 0×3 + 4 ×8 =32

2. Justifier la propriété : si $a\in\mathbb{N}_3$ et $b\in\mathbb{N}_3$ alors $a@b\in\mathbb{N}_3$.
   Soit $a\in\mathbb{N}_3$ et $b\in\mathbb{N}_3$
   En notant c, d, u et c', d' et u' les centaines, dizaines et unités, on a
   a@b = cc ' +dd ' + uu' < 81 ×3 < 1000 donc $a@b\in\mathbb{N}_3$

3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   a) pour tous les entiers a et b de $\mathbb{N}_3$, $a@b=b@a$
   VRAI puisque cc '+dd '+uu' =c'c +d'd +u'u

   b) pour tous les entiers a, b et c de $\mathbb{N}_3$, $a@(b+c)=a@b+a@c$
   FAUX, par exemple : 11 @ (23 +28)=11 @51 =6
   11 @ 23=5 et 11 @ 28=10 donc $a@b+a@c=16$

   c) pour tous les entiers a, b et c de $\mathbb{N}_3$, $a@(b@c)=(a@b)@c$.
   FAUX, par exemple : 11 @ (23 @28) =11 @28 =10
   (11 @23) @ 28=5 @ 28= 40
   d) si $a@a=0$ alors $a=0$.
   VRAI car *a*@*a* = 0 équivaut à $c^2 + d^2 + u^2 = 0$ d'où c = d = u = 0.

4. Résoudre dans $\mathbb{N}_3$ les équations suivantes :
   a) $23@x=23$.
   avec les notationc de l'énoncé, si x = 100 c + 10d + u,
   l'équation devient 0c + 2d + 3 u =23 donc trois solutions : 17 , 45 , 73 pour chacune des valeurs de c, soit au total 30 solutions (17, 117, 217, … 45, 145, ….)

   b) $x@73=x$.
   7 d + 3u = 100 c +10 d + u équivaut à 100 c + 3 d =2 u
   on en déduit que c =0 et on trouve quatre solutions : 0 , 23 , 46 , 69

5. Soit a et b deux entiers de $\mathbb{N}_3$.

On construit une liste de nombres de la façon suivante : $u(0)=a$, $u(1)=b$ puis pour tout entier naturel n , $u(n+2)=u(n+1)@u(n)$.
Ainsi, en prenant $n=0$, on obtient $u(2)=u(1)@u(0)$.
En prenant $n=1$, on obtient $u(3)=u(2)@u(1)$ et ainsi de suite.

a) $a=35$ et $b=39$; calculer u_{100} .
Les premiers termes de la suite sont : 35,39,54,51,29,19,83,35,39,...
La suite est donc périodique de période 7 donc $u_{100} = u_2 = 54$

b) $a=1$ et $b=7$; calculer u_{100} .
Les premiers termes de la suite sont :
1,7,7,49,63,51,33,18,27,58,66,78,90,63,54,42,28,24,36,30,9,0,0,0,0,0,0,...
La suite est stationnaire à partir du rang 21 donc $u_{100} = 0$.