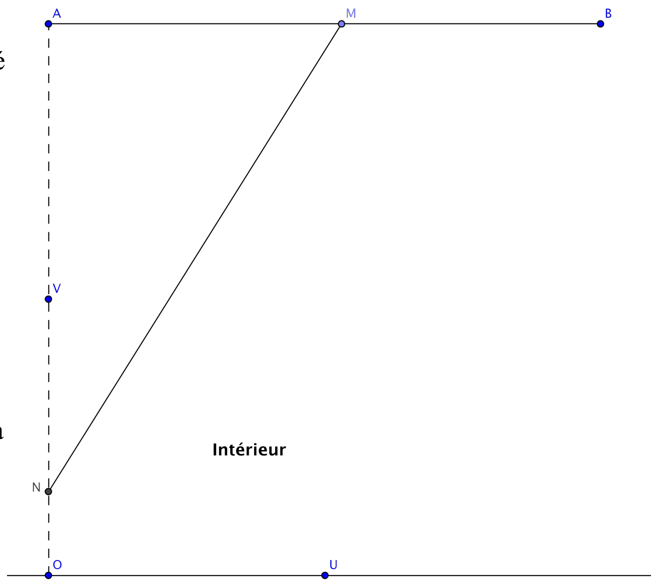
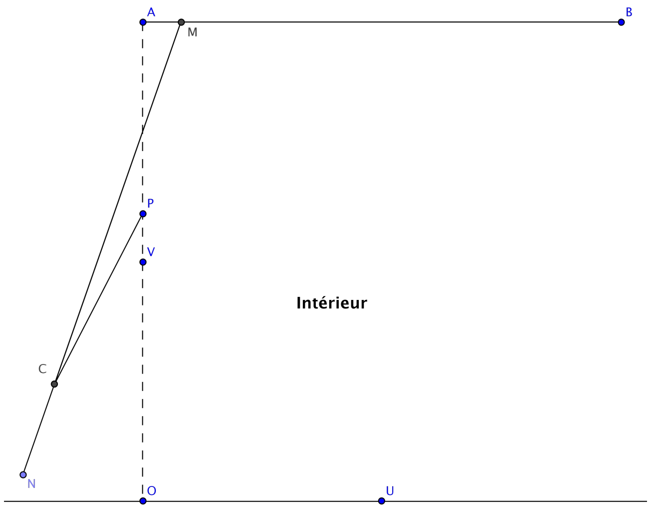
Portes basculantes

Les garages des immeubles récents sont équipés de portes basculantes qui permettent l'entrée dans les parties communes ainsi que dans les parties privées.
(O,U,V) est un repère orthonormal.

Partie A Accès aux parties communes
Les portes permettant l'accès aux parties communes sont en général conçues de telle sorte qu'elles ne débordent pas sur la voie publique.
La porte étudiée a une hauteur de 2m. Sa partie supérieure peut être assimilée à un point mobile M se déplaçant sur le segment [AB], sa partie inférieure à un point mobile N situé sur le segment [AO].
1) Montrer que lorsque M décrit [AB], le milieu I de [MN] décrit un arc de cercle que l'on précisera.
2) On note x l'abscisse de M dans le repère (O,U,V).
Exprimer l'ordonnée y de N en fonction de x.
3) a) Calculer en fonction de x les coordonnées du milieu J de [NI].
b) Tracer dans un repère orthonormal, avec soin, la courbe décrite par le point J lorsque M décrit [AB].
4) Dans cette question une réponse précise et argumentée est attendue. La porte est fermée. Une camionnette de hauteur 1,5 m souhaite sortir. Elle s'est arrêtée à 0,9 m de la porte. Celle-ci pourra-t-elle s'ouvrir ?



Partie B Accès aux garages privés
Les garages privés sont en général de taille limitée. La porte basculante est donc conçue de telle sorte qu'elle s'ouvre sur l'extérieur du garage.
La hauteur de la porte est encore de 2m et le point M se déplace sur le segment [AB].
Un bras rigide [PC] de longueur 0,8 m est ancré au mur au point P situé à 1,2 m du sol. La porte est fixée à ce bras en C situé à 1,6 m de M. Le point N matérialise l'extrémité de la porte.
1) Construire la figure correspondante en indiquant la position de la porte lorsque :
a) M est au milieu de [AB],
b) M est en B.
2) La porte du garage est fermée. Jean prétend qu'il n'y a aucun risque à laisser un véhicule à l'extérieur stationné à 1,2 m de la porte. A-t-il raison ?
3) La porte peut-elle s'ouvrir lorsqu'un objet de hauteur 0,6 m est déposé à l'extérieur du garage à 1 m de la porte ?



Solution proposée

Partie A

1) Le triangle AMN est rectangle en A. Le milieu I de l'hypoténuse est donc le centre de son cercle circonscrit dont le rayon est 1m. La distance de A à I est constante égale à 1m.
Lorsque M décrit [AB], I décrit le quart de cercle de centre A et de rayon 1 délimité par les segments [AO] et [AB].

2) M a pour coordonnées (x ; 2) avec $x \in [0 ; 2]$ et N(0 ; y) avec $y \in [0 ; 2]$.
$MN^2=4$ donc $(0-x)^2+(y-2)^2=4$ donc $(y-2)^2=4-x^2$.
Mais $y-2 \leqslant 0$ donc $y-2=-\sqrt{4-x^2}$ et $\boxed{y=2-\sqrt{4-x^2}}$

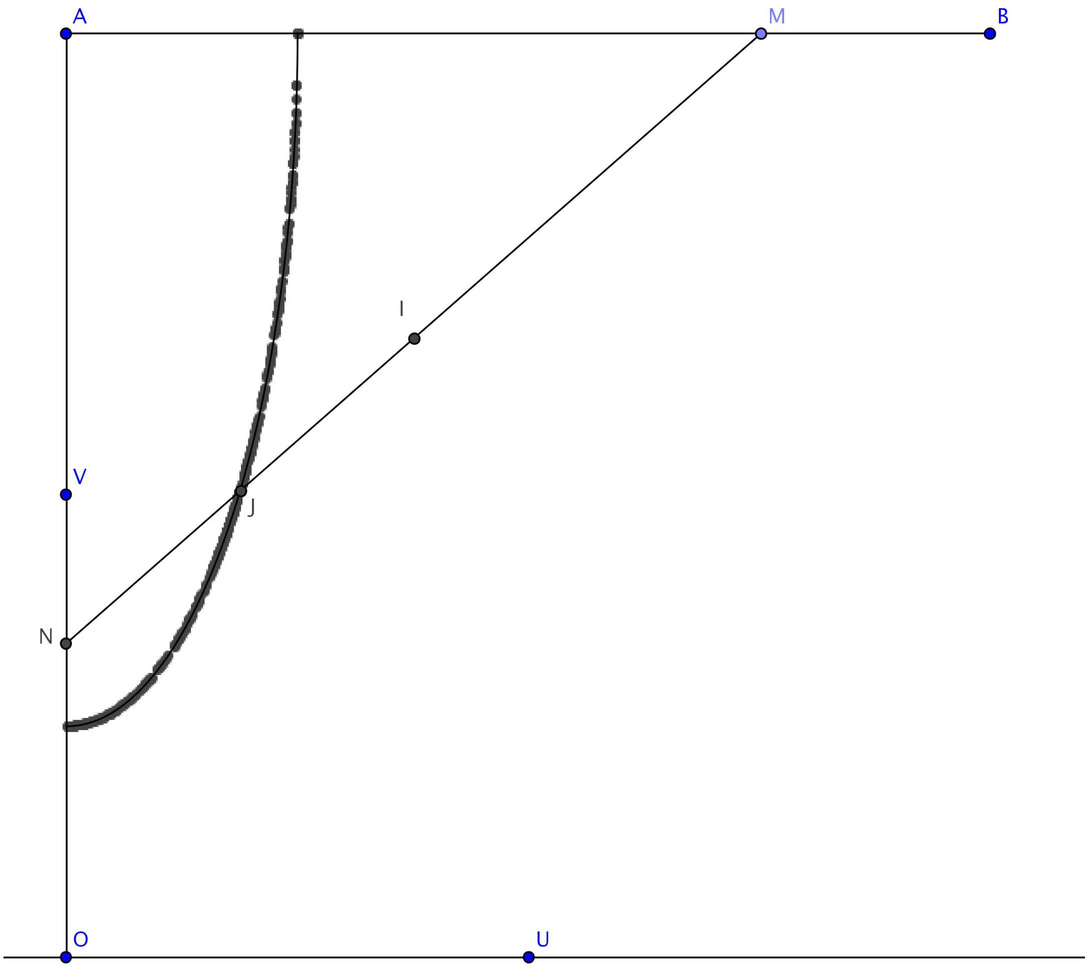
3) a) $x_J=\dfrac{x_N+x_I}{2}=\dfrac{0+\dfrac{x}{2}}{2}=\dfrac{x}{4}$ et $y_J=\dfrac{y_N+y_I}{2}=\dfrac{(2-\sqrt{4-x^2})+\left(\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}+2}{2}\right)}{2}$

donc $y_J=2-\dfrac{3}{4}\sqrt{4-x^2}$.

Mais alors $y_J=2-\dfrac{3}{4}\sqrt{4-(4x_J)^2}=2-\dfrac{3}{2}\sqrt{1-4x_J^2}$.

J décrit donc la courbe d'équation $x \in [0 ; 1]$ et $y=2-\dfrac{3}{2}\sqrt{1-4x^2}$.

b)



4) **Solution 1**

K(0,9 ; 1,5). On positionne M en (1,6 ; 2), alors N(0; 0,8).

Le coefficient directeur de la droite (MN) est $a_{\mathrm{MN}}=\dfrac{0{,}8-2}{0-1{,}6}=\dfrac{3}{4}$.

La droite (MN) a pour équation réduite $y=\dfrac{3}{4}x+0{,}8$.

Si x = 0,9 alors y = 1,475 donc $y<y_{\mathrm{K}}$.

Solution 2

On note $\alpha=\widehat{\mathrm{AMN}}$.

Dans le repère $(\mathrm{O},\mathrm{U},\mathrm{V})$, $\mathrm{M}(2\cos\alpha\,;2)$ et $\mathrm{N}(0\,;2-2\sin\alpha)$.

Une équation de (MN) est $y=\tan\alpha\,x+2-2\sin\alpha$.

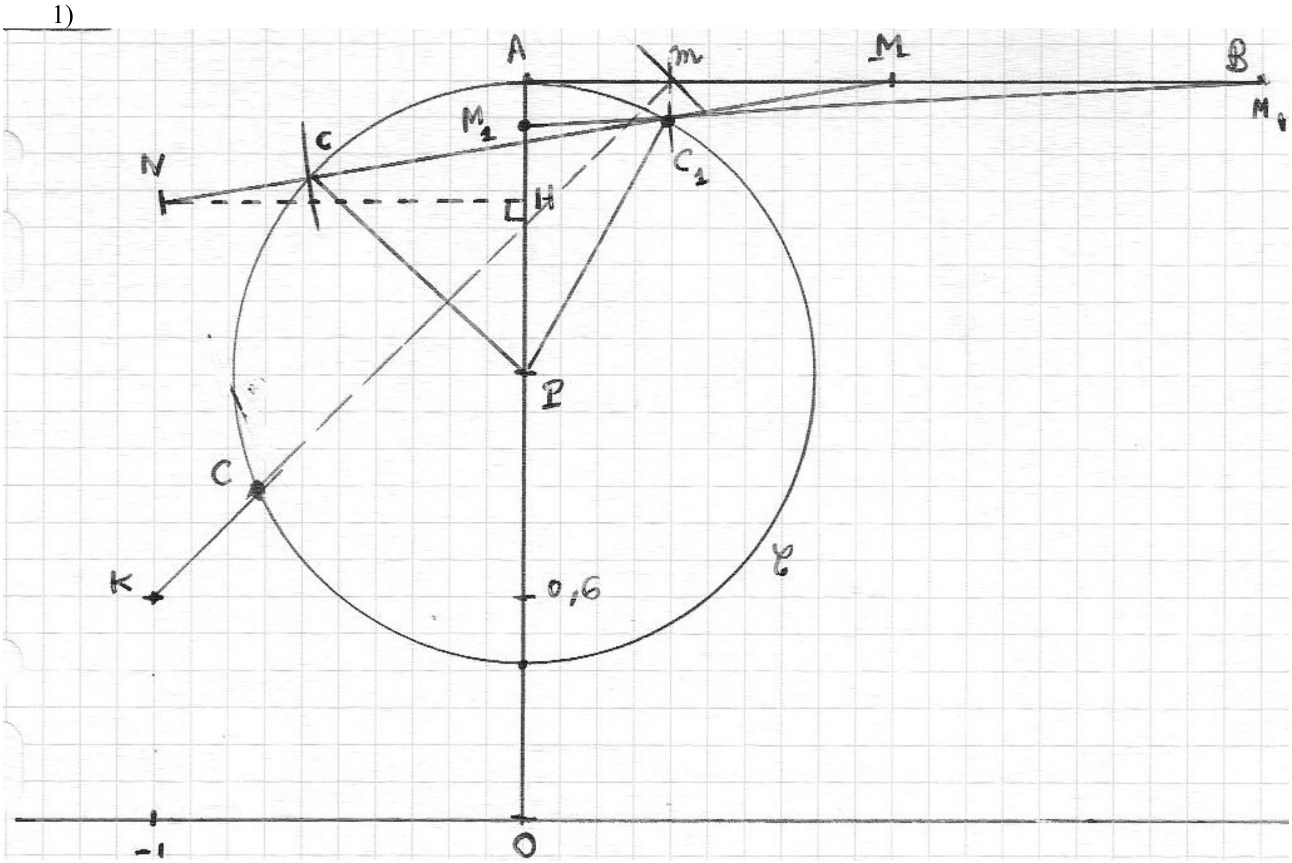
Le candidat doit chercher un α tel que $\tan\alpha\times0{,}9+2-2\sin\alpha<1{,}5$

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ convient.

Bilan : la porte ne pourra pas s'ouvrir.

Partie B

1)



2) Jean a raison car $\mathrm{HN}\leqslant\mathrm{PN}\leqslant\mathrm{PC}+\mathrm{CN}=0{,}8+0{,}4=1{,}2$.

3) Dans le repère donné, on justifie que $y_{\mathrm{C}}>y_{\mathrm{N}}$ et que $x_{\mathrm{C}}<0$. On note encore $\alpha=\widehat{\mathrm{AMN}}$.

$\sin\alpha=\dfrac{2-y_{\mathrm{N}}}{2}$ donc $y_{\mathrm{N}}=2-2\sin\alpha$ par ailleurs $\sin\alpha=\dfrac{y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{N}}}{0{,}4}$ donc $y_{\mathrm{C}}=2-1{,}6\sin\alpha$.

$\mathrm{PC}^2=(x_{\mathrm{C}})^2+(1{,}2-y_{\mathrm{C}})^2=(x_{\mathrm{C}})^2+(1{,}6\sin\alpha-0{,}8)^2=0{,}8^2$

Donc ${x_{\mathrm{C}}}^2=0{,}8^2-0{,}8^2(2\sin\alpha-1)^2$ donc $x_{\mathrm{C}}=-0{,}8\sqrt{1-(2\sin\alpha-1)^2}$

Or $\cos\alpha=\dfrac{x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{N}}}{0{,}4}$ donc $x_{\mathrm{N}}=x_{\mathrm{C}}-0{,}4\cos\alpha=-0{,}8\sqrt{1-(2\sin\alpha-1)^2}-0{,}4\cos\alpha$

Finalement, $\mathrm{N}\left(-0{,}8\sqrt{1-(2\sin\alpha-1)^2}-0{,}4\cos\alpha\,;2-2\sin\alpha\right)$

On résout l'équation $2-2\sin\alpha=0{,}6$ et on trouve $x_{\mathrm{N}}\approx-1{,}0188<-1$: **la porte ne peut s'ouvrir !**

Remarque : on peut à nouveau tenter l'angle $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ qui fonctionne puisque $\mathrm{N}(-1{,}011\,;0{,}586)$ environ