Les dominos

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on appelle domino de taille $a \times b$ un rectangle dont les longueurs des côtés sont a et b.
Une grille carrée de côté n est un quadrillage dont les n^2 cases sont des carrés de côté 1.
On dira qu'une grille carrée contient k dominos de taille $a \times b$ si on peut placer sans chevauchement ni dépassement k dominos de taille $a \times b$ sur cette grille (les sommets des dominos devant être placés sur les sommets des cases).

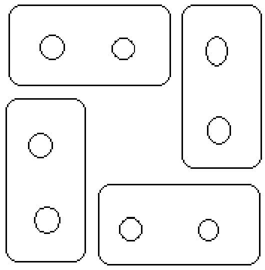
1. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 1×2.
   a) Combien de dominos (au maximum), la grille carrée de côté 3 peut-elle contenir ?
   b) Existe-t-il une grille carrée qui peut contenir un nombre impair de dominos mais pas un de plus ?

2. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 3×4
   a) Quelle est la plus petite grille carrée qui peut contenir au moins 21 dominos ?
   b) Cette grille peut-elle contenir 22 dominos ?

3. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 16×21.
   a) Montrer que la grille carrée de côté 58 peut contenir 9 dominos.
   b) Cette grille peut-elle contenir 10 dominos ?

Éléments de correction

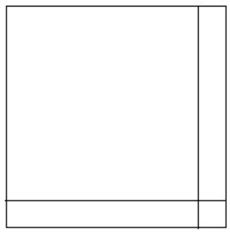
1. a) La grille carrée de côté 3 peut contenir 4 dominos :



La grille ne peut pas contenir 5 dominos car l'aire des cinq dominos est $5\times1\times2=10$ alors que l'aire du carré est 9.

b) Montrons qu'on ne peut pas trouver de grille carrée qui convienne :

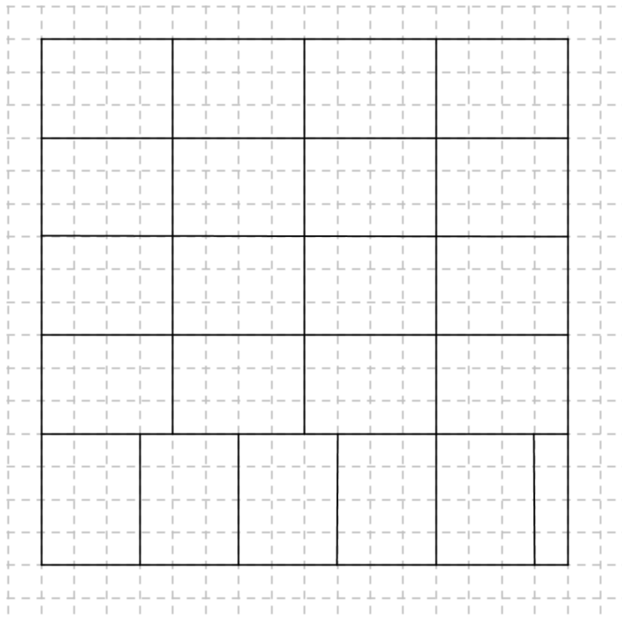
Si le carré a un côté pair alors on peut placer tous les dominos horizontaux ce qui complète entièrement le carré; comme il y a un nombre pair de lignes de dominos, le nombre de dominos est pair.



Si le carré a un côté impair alors on peut diviser en quatre parties :
* le grand carré a un côté pair donc contient un nombre pair de dominos et est complet.
* les deux grands rectangles sont de dimensions 1 et un entier pair donc ils sont complets et de même dimensions donc à eux deux ils contiennent un nombre pair de dominos.
* il reste un carré 1×1 qui est trop petit pour permettre un domino supplémentaire.

2. a) La plus petite grille carrée qui peut contenir au moins 21 dominos doit avoir une aire supérieure à $21\times3\times4=252$.

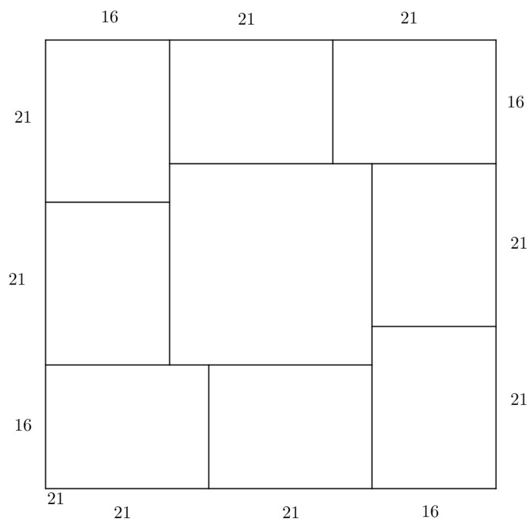
Essayons de remplir la grille carrée de côté 16 :



b) Comme il ne reste plus que 4 carrés de côté 1, on ne peut pas placer 22 dominos.

3. a) Remplissons la grille carrée de côté 58 :

Le carré central a pour dimensions 26×26 ce qui permet d'en placer un neuvième.



b) Supposons qu'on puisse inscrire 10 dominos.

Il reste quatre carrés de côté 1.
Observons une ligne contenant l'un de ces carrés.
Sur cette ligne, il y a entre 1 et 4 « trous ».
Il faut donc compléter entre 54 et 57 carrés.

$54=2\times21+12=21+2\times16+1=3\times16+6$
$55=2\times21+13=21+2\times16+2=3\times16+7$
$56=2\times21+14=21+2\times16+3=3\times16+8$
$57=2\times21+15=21+2\times16+4=3\times16+9$

On ne peut donc y placer 10 dominos.