Proposition de problème pour les olympiades

23 mai 2014

Un nombre naturel non-nul N est *olympique* si l'écriture décimale $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$ (avec $c_n \in \{1, \dots, 9\}$ et $c_i \in \{0, \dots, 9\}$ pour $i = 0, \dots, n-1$) de
$N = c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \dots + c_1 10 + c_0$ vérifie les deux conditions suivantes :

– Si deux chiffres consécutifs c_i, c_{i-1} de (l'écriture décimale de) N sont tous les deux pairs, alors ils sont égaux.
  (On ne tiendra pas compte de zéros inutiles : $0000043 = 43$ ne viole pas la condition !)
– Si deux chiffres consécutifs c_i, c_{i-1} de N sont tous les deux impairs, alors ils sont différents.

Exemples : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont olympiques car ils n'ont qu'un chiffre et n'ont donc aucune condition à satisfaire, $12345, 3157, 2251300$ le sont également, $3112, 21664, 551429$ ne le sont pas.

Un nombre naturel N non-nul est *semi-olympique* s'il satisfait au moins une des deux conditions ci-dessus.

Remarque : Tout nombre olympique est semi-olympique.
Exemples : $1324505, 449667729$ sont semi-olympiques mais pas olympiques, 4677 n'est pas semi-olympique.

1. Déterminer le plus petit entier naturel impair qui n'est pas olympique.
2. Déterminer le plus petit entier naturel pair strictement positif qui n'est pas olympique.
3. Déterminer le plus petit entier strictement positif qui n'est pas semi-olympique.
4. Combien y-a-t-il de nombres olympiques à deux chiffres (c'est-à-dire dans l'intervalle $[10, 99]$) ?

   Notons P_n le nombre de nombres olympiques pairs à n chiffres (on convient qu'un nombre à n chiffres appartient à l'intervalle $[10^{n-1}, \dots, 10^n - 1]$) et notons I_n le nombre de nombres olympiques impairs.

5. Déterminer P_2 et I_2.
6. Déterminer P_3 et I_3.
7. Combien y-a-t-il de nombres olympiques à 4 chiffres ?
8. Combien y-a-t-il de nombres semi-olympiques à 4 chiffres.

Remarque On pourrait omettre la définition de semi-olympique et les questions 3 et 8 (et remplacer "à 4 chiffres" par "à trois chiffres" dans la question 7) pour raccourcir l'exo.

Corrigé :

(1) 11

(2) 20

(3) 1102

(4) 69. Justification : Soit $10c_1+c_0$ un nombre olympique à deux chiffres (On convient que $c_{n-1} \in \{1,\dots,9\}$ pour un nombre (décimal) $10^{n-1}c_{n-1}+c_{n-2}10^{n-2}+\dots$ à n chiffres). Si $c_0 = 0$, alors c_1 est impair quelconque (5 possibilités), si $c_0 \in \{2,4,6,8\}$ alors ou bien $c_1 = c_0$ ou bien c_1 est impair quelconque (ce qui donne $4(1+5) = 24$ possibilités) pour un total de $5+24 = 29$ nombres olympiques pairs à deux chiffres.

Si c_0 est impair, alors ou bien c_1 est pair et non-nul ou bien c_1 est impair et différent de c_0 ce qui donne $5(4+4) = 40$ nombres olympiques impairs à deux chiffres.

(5) $P_2 = 29$, $I_2 = 40$, voir ci-dessus.

(6) En étudiant toutes les possibilités de construire un nombre olympique $\sum_{i=0}^{n-1} c_i 10^{i+1} + \gamma_0$ en rajoutant un $n+1$-ième chiffre à un nombre olympiques $\sum_{i=0}^{n-1} c_i 10^i$ à n chiffres, on arrive au système

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + 5I_n, \\ I_{n+1} = 5P_n + 4I_n. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{array}{rcccl} P_3 & = & 29 + 5\cdot 40 & = & 229 \\ I_3 & = & 5\cdot 29 + 4\cdot 40 & = & 305 \end{array}$$

(ce qui donne $229 + 305 = 534$ nombres olympiques à 3 chiffres).

(7) On a

$$\begin{array}{rcccl} P_4 & = & 229 + 5\cdot 305 & = & 1754 \\ I_4 & = & 5\cdot 229 + 4\cdot 305 & = & 2365 \end{array}$$

ce qui donne $4119 = 1754 + 2365$ nombres olympiques à 4 chiffres.

(8) Soustrayons le nombre de nombres non-semi-olympiques à 4 chiffres de 9000 (qui est le nombre total de nombres à 4 chiffres) : Un nombre décimal $c_3c_2c_1c_0$ n'est pas semi-olympique si ou bien (c_3, c_2 sont identiques et impaires et c_1, c_0 sont tous les deux pairs et différents ($5\cdot 5\cdot 4 = 100$ possibilités)) ou bien (c_3, c_2 sont tous les deux pairs et différents et $c_3 \neq 0$ et c_1, c_0 sont identiques et impaires ($4\cdot 4\cdot 5 = 80$ possibilités)) et ces deux cas s'excluent mutuellement. Il y a donc exactement $180 = 100 + 80$ nombres à 4 chiffres qui ne sont pas semi-olympiques. On en déduit qu'il y a $9000 - 180 = 8820$ nombres semi-olympiques à 4 chiffres.

Méthode plus compliquée mais qui se généralise mieux : Notons P'_n, respectivement I'_n, le nombre de semi-olympiques pairs, respectivement impairs, à n chiffres qui ne possèdent pas deux chiffres pairs consécutifs différents dans leur écriture décimale. On a $P'_2 = 5 + 4(1+5) = 29$ (voir ci-dessus) et $I'_2 = 45$ (les 45 entiers impairs $11, 13, 15, \dots, 97, 99$ à deux chiffres). On a les formules récursives

$$\begin{array}{l} P'_{n+1} = P'_n + 5I'_n \\ I'_{n+1} = 5(P'_n + I'_n) \end{array}$$

qui donnent

$$\begin{array}{rcccr} P'_3 & = & 29+5\cdot 45 & = & 254 \\ I'_3 & = & 5(29+45) & = & 370 \\ P'_4 & = & 254+5\cdot 370 & = & 2104 \\ I'_4 & = & 5(254+370) & = & 3120 \end{array}$$

Notons similairement P''_n, respectivement I''_n, le nombre de semi-olympiques pairs, respectivement impairs, à n chiffres qui ne possèdent pas deux chiffres impairs consécutifs identiques dans leur écriture décimale. On a $P''_2 = 45$ et $I''_2 = 40$.

$$\begin{array}{l} P''_{n+1} = 5(P''_n + I''_n) \\ I''_{n+1} = 5P''_n + 4I''_n \end{array}$$

qui donnent

$$\begin{array}{rcccr} P''_3 & = & 5(45+40) & = & 425 \\ I''_3 & = & 5\cdot 45+4\cdot 40 & = & 385 \\ P''_4 & = & 5(425+385) & = & 4050 \\ I''_4 & = & 5\cdot 425+4\cdot 385 & = & 3665 \end{array}$$

Observons maintenant qu'un nombre olympique pair, respectivement impair, à n chiffres donne une contribution de 1 à P'_n et à P''_n, respectivement à I'_n et I''_n. Le nombre de semi-olympiques à n chiffres est donc ègal à $P'_n + I'_n + P''_n + I''_n - P_n - I'_n$ ce qui donne pour $n = 4$ un total de

$$2104 + 3120 + 4050 + 3665 - 1754 - 2365 = 8820$$

semi-olympiques à 4 chiffres.

(Remarque : Pour $n = 3$ on obtient bien tous les

$$254 + 370 + 425 + 385 - 229 - 305 = 900$$

nombres à 3 chiffres qui sont tous semi-olympiques.)

(On pourrait aussi raisonner sur la parité du plus grand chiffre c_{n-1} et rajouter un nouveau chiffre c_n en tenant compte des parités de c_{n-1}, c_n mais il faut alors gérer les problèmes lié au fait que c_{n-1} est peut-être 0 dans un nombre olympiques $c_n \ldots$. Cela devient donc plus compliqué !)