OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2013

Académie de Grenoble

CLASSE DE PREMIÈRE **Durée 4 heures**

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

Les exercices n° 1,2,3 et 4 seront traités par les élèves des sections autres que S et STI.
Les exercices n° 1,2,3 et 5 seront traités par les élèves des sections S et STI.

EXERCICE 1 : LES NOMBRES HARSHAD

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

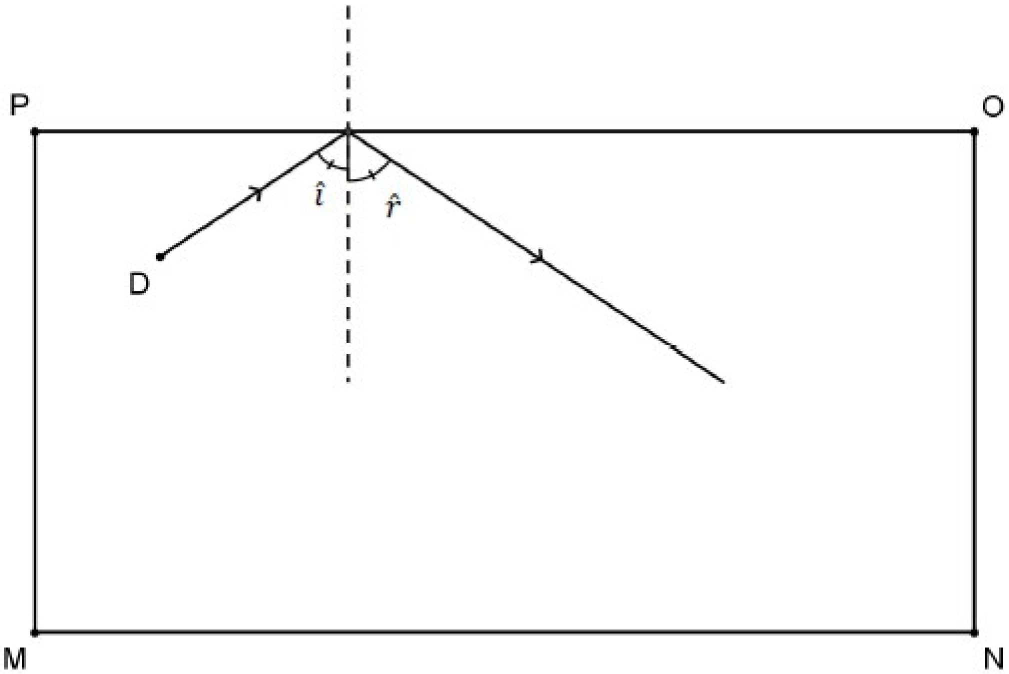
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE 2 : LE BILLARD RECTANGULAIRE

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques :



On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

1 – Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

2 – Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

3 – Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

4 – Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

5 – Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE académique 3 : ***L'art de bien bluffer*** ***(pour les élèves des toutes les sections)***

Alembert et Bayes jouent au jeu suivant :

Ils mettent dans un pot une mise de départ (1 euro pour Alembert et 3 euros pour Bayes).
Alembert lance un dé équilibré à six faces. Il regarde le résultat et cache le dé pour que Bayes ne puisse pas voir le numéro obtenu. Pendant toute la phase suivante, le dé restera caché dans la même position.

Alembert peut choisir entre :

1. abandonner et Bayes remporte alors le contenu du pot.
2. augmenter sa mise de 4 euros ce qui oblige Bayes à choisir entre :
   a) abandonner et Alembert remporte alors le contenu du pot.
   b) augmenter lui aussi sa mise de 4 euros.

Si ni l'un ni l'autre n'a abandonné, on s'intéresse alors au résultat du dé :

- si le dé indique 6, Alembert remporte le contenu du pot.
- sinon, c'est Bayes qui remporte contenu du pot.

Le gain algébrique d'Alembert pourra donc être de 7 euros, 3 euros, -1 euro ou -5 euros, selon que l'un des joueurs abandonne ou pas.

Première partie : une partie sans bluff.

Dans cette partie, Alembert augmente sa mise si le dé indique 6 et sinon, il abandonne.
Quant à Bayes, il abandonne dès qu' Alembert augmente sa mise.

À quel joueur ce jeu est-il le plus favorable et quel est son gain en moyenne ?

Deuxième partie : une partie avec bluff.

Dans cette partie,

- si le dé indique 6, Alembert augmente sa mise.
- sinon, Alembert augmente sa mise avec une probabilité p .

Si Alembert a augmenté sa mise, Bayes augmente lui aussi sa mise, mais avec une probabilité q .

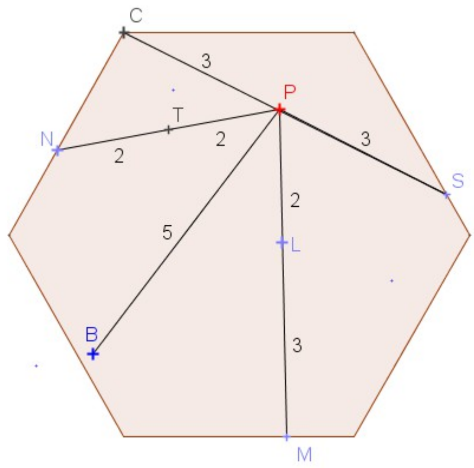
1. Dans cette question, $p=\frac{1}{5}$ et $q=\frac{1}{3}$.
   Quelle va être en moyenne le gain ou la perte de chaque joueur ?
2. Dans cette question, $p=\frac{1}{10}$ et $q=\frac{1}{2}$.
   Quelle va être en moyenne le gain ou la perte de chaque joueur ?
3. Dans cette question, $p=\frac{1}{10}$ et $q=\frac{1}{3}$.
   Quelle va être en moyenne le gain ou la perte de chaque joueur ?

4. Dans cette question, l'augmentation des mises n'est plus de quatre euros mais de cinq euros.
   Avec quelle probabilité p Alembert doit-il bluffer pour gagner le maximum d'argent en moyenne ?
   Quel sera alors son gain moyen ?

EXERCICE académique 4 : ***Distance sur un réseau ferroviaire (pour les élèves des sections autres que S et STI)***

A – Dans un pays imaginaire...

Toutes les villes sont reliées par des voies de chemin de fer à la capitale P.
Il n'existe en revanche aucune liaison directe entre deux villes qui ne sont pas sur une même droite passant par P.



On note AB la distance habituelle (appelée distance euclidienne) entre deux points A et B, exprimée dans une certaine unité de longueur u.
La distance à parcourir pour aller de A à B en utilisant le réseau ferroviaire sera notée d(A,B), elle sera dans la suite appelée distance ferroviaire.

Ainsi, la « distance ferroviaire » du point M au point B est d(M,B) = MP + PB = 10, tandis que la « distance ferroviaire » du point M au point L est d(M,L) = ML = 3.

1 – Quelles sont, parmi les villes représentées sur la carte, celles qui sont situées à une distance ferroviaire inférieure ou égale à cinq unités de la ville L ?

2 – La distance habituelle vérifie la propriété suivante :
« Pour trois points A, B et C du plan, AC = AB + BC si et seulement si les points A, B et C sont alignés dans cet ordre ». Cette propriété est-elle vérifiée par la distance ferroviaire ?

B – Une modélisation

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé $(P\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, dont le centre représente la capitale.
R est le point de coordonnées (2 ; 0) et S est le point de coordonnées (1; 0).

On supposera dans cette modélisation que <u>tout point du plan</u> (et plus seulement les villes) est rélié par une ligne imaginaire au point P et, comme dans la partie A, qu'il n'existe pas de ligne entre deux points quelconques du plan non alignés avec le point P.

Enfin, par « distance », il faut toujours entendre «distance sur ce réseau ferroviaire ».

1 – Cercles et disques ferroviaires

a) Quel est l'ensemble des points du plan situés à une distance 2 du point P ?
b) Quel est l'ensemble des points du plan situés à une distance inférieure ou égale à 1 du point R ?
Quel est l'ensemble des points situés à une distance égale à 3 du point R ?

2 – Égalités de distances
a) Quels sont les points du plan situés plus près de R que de P ?
b) Quels sont les points du plan situés à la même distance de R que de P ?
c) Quel est l'ensemble des points équidistants des points R et S ?

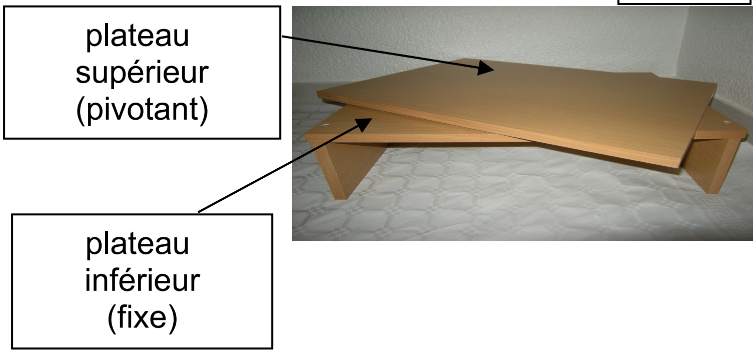
3 – Le chemin le plus court
Quel est, dans le plan muni de la distance ferroviaire, le chemin le plus court d'un point quelconque A à un point quelconque B ?

EXERCICE académique 5 : ***Le meuble pour téléviseur*** ***(pour les élèves des sections S et STI)***

Dans cet exercice, on s'intéresse à un petit meuble pour télévision dont on donne deux photos ci-dessous :

fig. 1

fig. 2



Les deux plateaux sont assimilés à deux rectangles ayant tous les deux les mêmes dimensions : 50 cm de longueur et 35 cm de largeur.
Le plateau supérieur peut pivoter autour d'un axe passant par le centre des deux plateaux.
Sur la figure 1, le plateau supérieur est en position initiale.
Sur la figure 2, le plateau supérieur a tourné d'un certain angle par rapport à sa position initiale.

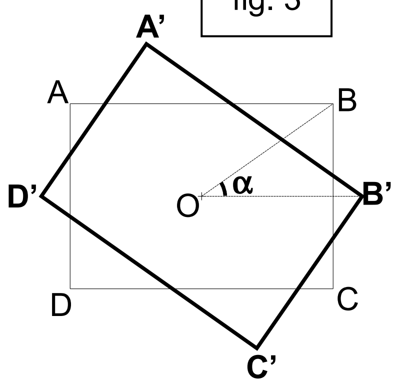
Pour la suite, on précise que :

- on néglige l'épaisseur des plateaux ainsi que l'espace présent entre le plateau inférieur et le plateau supérieur,
- on fait tourner le plateau supérieur dans le sens des aiguilles d'une montre.

La figure 3 ci-contre schématise la situation de la figure 2 :

- le rectangle ABCD représente le plateau inférieur, avec AB = 50 cm et BC = 35 cm,
- le rectangle A'B'C'D' représente le plateau supérieur ayant tourné d'un angle α, dans le sens des aiguilles d'une montre, par rapport à sa position initiale
($\alpha = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'} = \widehat{DOD'} = \widehat{AOA'}$),
- le point O est le centre des rectangles ABCD et A'B'C'D'.

fig. 3

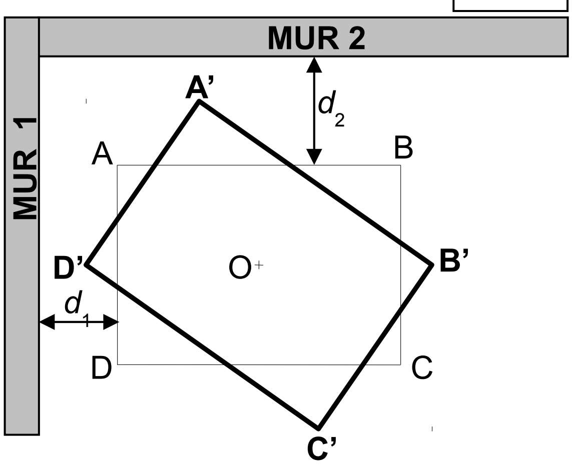


<u>1ère partie</u>

Le meuble est placé dans l'angle d'une pièce, comme indiqué sur la figure 4 (le côte [AD] est parallèle au MUR 1 et le côté [AB] est parallèle au MUR 2).

Déterminer à quelles distances minimales d_1 et d_2 on doit placer le meuble pour que le plateau supérieur puisse tourner sans buter contre les murs (arrondir les résultats au mm).

fig. 4



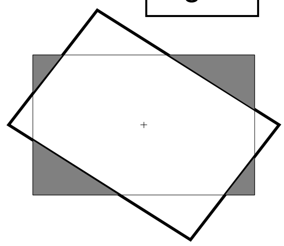
<u>2ème partie</u>

On s'intéresse dans la suite, dans différents cas, à l'aire de la surface visible du plateau inférieur.

Par exemple :

- quand le plateau supérieur est en position initiale (fig.1), cette aire est égale à 0 (le plateau inférieur est entièrement recouvert par le plateau supérieur),

fig. 5

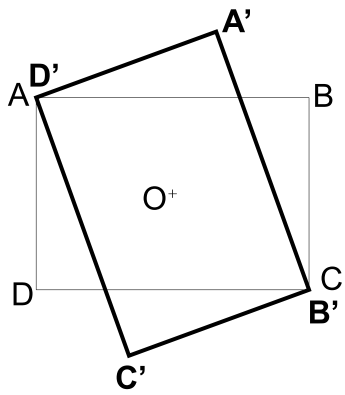


- sur la figure 5 ci-contre, cette aire est celle de la surface grisée, formée dans ce cas de quatre triangles rectangles.

1)a) En prenant modèle sur la figure 5, faire une figure représentant le cas où le plateau supérieur a tourné d'un quart de tour par rapport à sa position initiale et colorier en gris la surface visible du plateau inférieur.

b) Calculer dans ce cas l'aire de la surface visible du plateau inférieur.

fig. 6



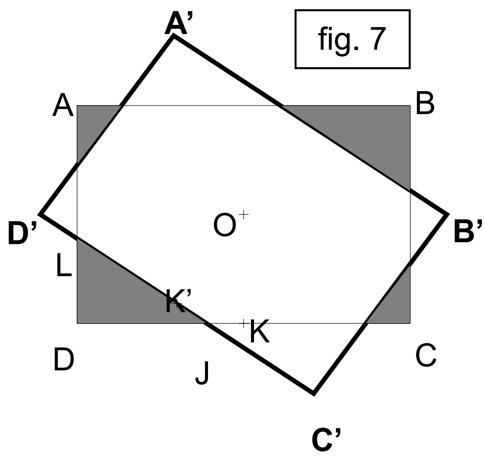
2) La figure 6 représente le cas où la diagonale [B'D'] du rectangle représentant le plateau supérieur est confondue avec la diagonale [AC] du rectangle représentant le plateau inférieur.

a) Déterminer dans ce cas la mesure de l'angle β dont a tourné le plateau supérieur par rapport à sa position initiale (arrondir le résultat au degré).

b) Calculer, au cm² près, l'aire de la surface visible du plateau inférieur.

3) La figure 7 représente un cas où le plateau supérieur a tourné d'un angle α compris entre 0° et la valeur β déterminée à la question **2)a)**.

fig. 7



On appelle K le milieu du segment [DC], K' le milieu du segment [D'C'], J le point d'intersection de [DC] et [D'C'] et L le point d'intersection de [D'C'] et [AD].

a) Exprimer la mesure de l'angle $\widehat{JOK}$ en fonction de α.

b) Exprimer l'aire du triangle LDJ en fonction de α.

On ne demande pas de déterminer l'aire des trois autres triangles grisés : celui ayant B comme sommet a la même aire que LDJ et, par un raisonnement analogue, on pourrait trouver l'aire des deux autres triangles.

4) On se place enfin dans un cas où le plateau supérieur a tourné d'un angle α compris entre la valeur β déterminée à la question **2)a)** et 90°. Exprimer dans ce cas l'aire de la surface visible du plateau inférieur en fonction de α.