# OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
# SESSION 2012

## CLASSES DE PREMIÈRE

Durée : 4 heures

*Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.*

**Les exercices n° 1, 2, 3 et 4 seront traités par les élèves des sections autres que S et STI.**

**Les exercices n° 1, 2, 3 et 5 seront traités par les élèves des sections S et STI.**

### EXERCICE NATIONAL n°1 (Toutes sections)

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

*On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.*

**1.** Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

**2.** Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

**3.** Soit $n$ un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

*a.* Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

*b.* Démontrer que tous les chiffres de $n$ sont impairs.

*c.* Démontrer que $n$ s'écrit avec au plus quatre chiffres.

*d.* Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

**4.** Soit $n$ un entier *digisible* quelconque.

*a.* Démontrer que $n$ s'écrit avec au plus sept chiffres.

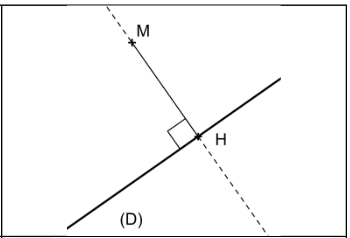
*b.* Si $n$ s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de $n$.

*c.* Déterminer le plus grand entier *digisible*.

**EXERCICE NATIONAL n°2 (Toutes sections)**

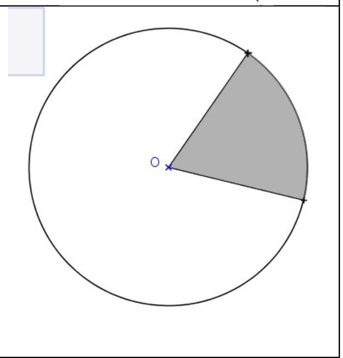
## *Rappels*

- *On appelle **distance entre un point*** **M** ***et une droite* (D)** *la distance* MH*, où* H *est le point d'intersection de* (D) *avec la droite perpendiculaire à* (D) *passant par* M.



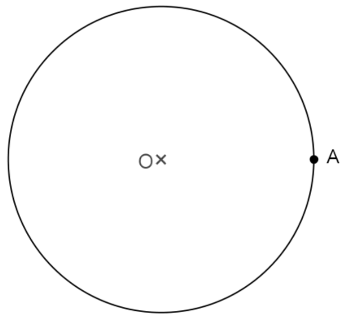

- *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(en degrés), alors **l'aire de la portion de disque** grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$.

*Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point* M *à **un segment*** **[BC]** *comme étant la distance du point* M *à la droite* (BC).




**Partie I**

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.




**1.** Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

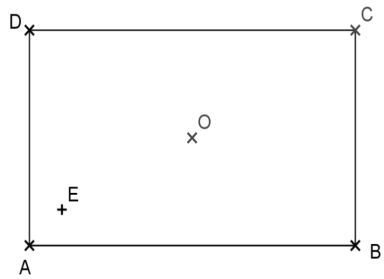
**2.** Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

**3.** Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

**Partie II**

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.




**1.** Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

**2.** ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

***b.*** Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

***c.*** Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

**3.** Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

**4.** Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

**5.** Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

**EXERCICE ACADÉMIQUE n°3 (Toutes sections) : des polygones manichéens**

On dit qu'un polygone du plan est convexe si chacun de ses angles aux sommets mesure strictement moins de 180°. On note $P_n$ un polygone convexe à $n$ ($n \geq 3$) sommets.
Par ailleurs, deux triangles sont d'intérieurs disjoints s'ils n'ont pas de point commun ou si leurs points communs appartiennent à un de leurs côtés.

1. Montrer que tout polygone $P_n$ est la réunion de $n - 2$ triangles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

On dira qu'une telle réunion de $n - 2$ triangles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints est une triangulation de $P_n$ , et l'on admettra dans la suite que toute triangulation de $P_n$ contient exactement $n - 2$ triangles.

2. a) Représenter toutes les triangulations comportant 2 triangles de $P_4$.
   b) Représenter toutes les triangulations comportant 3 triangles de $P_5$.
   c) Montrer que $P_6$ admet une triangulation dont au moins l'un des triangles n'a aucun côté au bord de $P_6$.

3. Montrer que l'on peut toujours colorier les triangles d'une triangulation de $P_n$ en noir et en blanc de telle sorte que deux triangles qui ont une arête commune ont des couleurs différentes.

On supposera dorénavant que les triangles d'une triangulation ont été coloriés en noir ou en blanc de façon à ce que deux triangles qui ont une arête commune soient toujours de couleurs différentes. Une telle triangulation sera dite *admissible* si tous les triangles ayant au moins une arête au bord de $P_n$ ont la même couleur (par exemple noir).

4. Trouver, lorsqu'elles existent, toutes les triangulations admissibles de $P_3$, $P_4$, $P_5$ et $P_6$.

5. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $P_{3k}$ a au moins une triangulation admissible.

6. Montrer que toute triangulation admissible de $P_{3k}$ a exactement $2k - 1$ triangles d'une couleur et $k - 1$ triangles de l'autre couleur.

7. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $P_{3k+1}$ et $P_{3k+2}$ n'ont aucune triangulation admissible.

**EXERCICE ACADÉMIQUE n°4 (Sections autres que S et STI) : des territoires aléatoires**

On cherche à modéliser la répartition des habitants et la surface occupée par chacun d'eux dans deux villes particulières de $N$ habitants (où $N$ est un nombre entier). Pour cela on étudiera deux modèles.

## A - Modèle 1 :

On considère que la ville est une bande de terre le long de la mer. On modélise le territoire de cette ville par une suite de carrés alignés (voir la figure 1). Notons $A$ le nombre de carrés qui composent la ville.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | .... | | $A$ |

figure 1

La répartition des habitants suit le modèle suivant : on construit aléatoirement une liste de $N$ nombres entiers distincts choisis entre 1 et $A$ (correspondant à chacun des habitants), et on place chacun des $N$ habitants au centre du carré correspondant à son numéro. On répartit alors la surface de la ville entre ses habitants en attribuant chaque point de la surface des carrés qui la composent à la personne la plus proche de ce point.

1. Dans cette question on prend $N = 3$ et $A = 9$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

figure 2

On a construit de manière aléatoire la liste des 3 valeurs suivantes correspondants à chacun des 3 habitants : 2 ; 8 ; 9. Recopier le tableau, placer ces 3 habitants et représenter par trois couleurs différentes la surface occupée par chacun d'eux. Donner alors l'aire de chacune de ces surfaces (l'unité d'aire est l'aire d'un des carrés qui composent la ville).

2. Dans cette question $N$ et $A$ sont deux entiers quelconques (avec $N \leqslant A$) et chaque carré a toujours une surface d'une unité.
a) Quelle est l'aire de la plus petite surface possible pour un habitant ? (justifier)
b) Quelle est l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant ? (justifier)

## B – Modèle 2 :

On considère que la ville peut être modélisée par un territoire carré.
On choisit un nombre entier $A$ supérieur ou égal à $N$ tel que $A$ soit le carré d'un entier.
On divise ce « carré-ville » en $A$ petits carrés de même taille que l'on numérote de 1 à $A$.
On construit aléatoirement une liste de $N$ nombres entiers distincts choisis entre 1 et $A$, et on place chacun des $N$ habitants au centre du carré correspondant à son numéro.
On répartit alors la surface de la ville en attribuant chaque point de la surface des carrés qui la composent à la personne la plus proche de ce point.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

1. Dans cette question on prend $N = 3$ et $A = 9$
On conserve la liste des 3 valeurs précédentes : 2 ; 8 ; 9.
Recopier le tableau, placer les 3 habitants, et représenter en couleur la surface occupée par chacun de ces habitants. Donner alors l'aire de cette surface en supposant toujours que la surface de chaque petit carré a une aire égale à une unité.

2. En général, en posant la surface de chaque petit carré égale à 1, dans un modèle à $N$ habitants et $A$ petits carrés (avec $N \leqslant A$).
a) Quelle est l'aire de la surface moyenne par habitant ?
b) Quelle est l'aire de la plus petite surface possible pour un habitant ?
c) Montrer que l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant n'a pas la même valeur que celle obtenue dans le modèle précédent, où la ville est située en bord de mer.

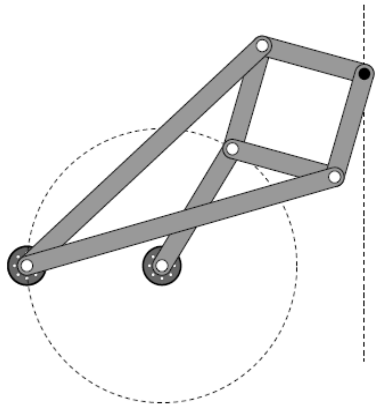
**EXERCICE ACADÉMIQUE n° 5 (Sections S et STI) : droite et naissance de l'ère industrielle**

Si l'on devait définir une droite, on penserait à « *le plus court chemin entre deux points* » (définition intrinsèque) et à « *ce que l'on trace avec une règle* » ; mais cette deuxième définition apparemment effective n'en est pas une : on construit une droite avec une droite (la règle), c'est-à-dire que l'on copie une droite préexistante.

La question se pose donc : existe-t-il un outil, pour tracer des droites, ne faisant aucun usage d'une droite préexistante ?

Jusqu'à l'époque des premières machines à vapeur, les artisans savaient fabriquer des pièces raisonnablement droites. Mais on ne savait pas faire mouvoir une pièce dans un mouvement rectiligne parfait. Pourtant, dans pratiquement toutes les machines de production on a besoin de pièces qui se déplacent suivant un mouvement rectiligne. Ainsi toutes les nations, où l'industrie moderne se développait, cherchaient des machines produisant des mouvements rectilignes parfaits. De très grands mathématiciens ont participé à ces recherches.

La première solution exacte, dont toutes les autres découlent, est due à Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913), officier des armées françaises.



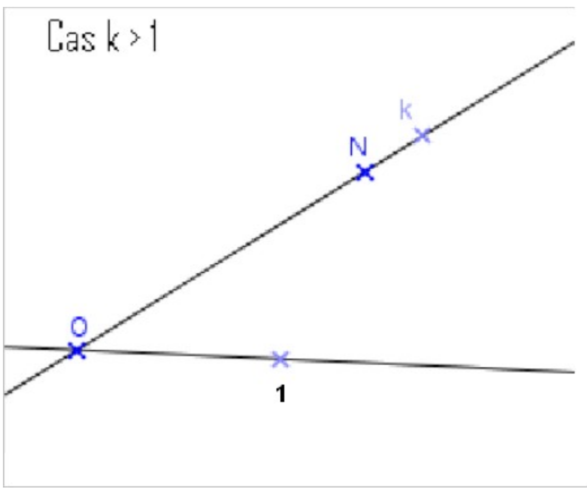
La machine de Peaucellier

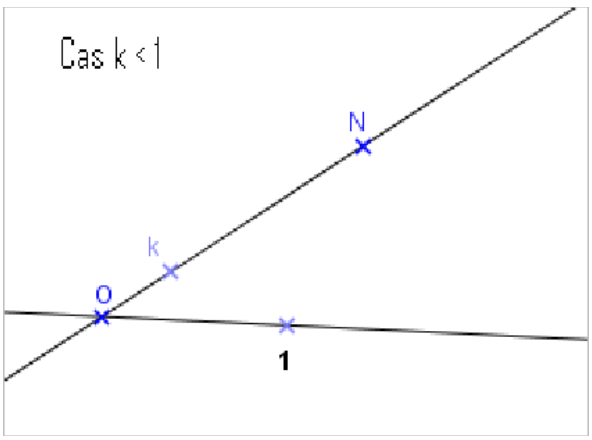
**<u>Il s'agit ici de voir pourquoi la machine de Peaucellier permet un mouvement rectiligne parfait .</u>**

## I – Une nouvelle transformation : l'inversion

Définition : Étant donnés un point O du plan et un réel $k$ positif non nul, on appelle inversion de centre O, de puissance $k$ la transformation qui à tout point M du plan, distinct de O, fait correspondre le point M' de la demi-droite [OM) tel que $OM \times OM' = k$.

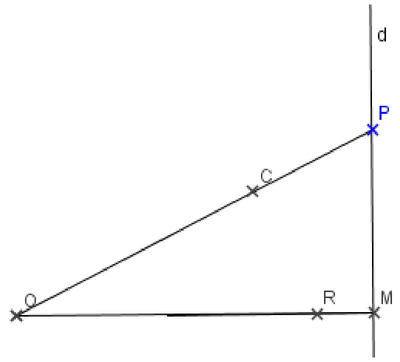
1. <u>Images de points</u> : Soit O un point donné.
   a) Soit M un point situé à 4 unités de O. Tracer l'image M' de M par l'inversion de centre O et de puissance $k = 6$.
   b) Quelle est l'image de ce point M' par cette même inversion ?
   c) Le point O a-t-il une image par cette inversion ? Pourquoi ?
   d) Existe-t-il des points du plan invariants par cette inversion de centre O, de puissance $k = 6$ (c'est-à-dire des points qui sont leur propre image par cette inversion) ? Si oui, quel ensemble décrivent-ils ?
   e) Construction dans le cas général, une unité étant choisie. Soit N un point quelconque, distinct de O. Compléter les figures ci-dessous en construisant, à la règle non graduée et au compas, l'image de N par l'inversion de centre O, de puissance $k$, réel positif quelconque fixé.



2. <u>Image d'une droite, image d'un cercle</u> :

Soit O un point donné et $k$ un réel positif non nul.
Soit d une droite ne passant par O. Soit M le point d'intersection entre d et la perpendiculaire à d passant par O. Soit R l'image de M par l'inversion de centre O de puissance $k$.




Soit P un point quelconque de d et C son image par la même inversion.

a) Montrer que $\frac{OC}{OR} = \frac{OM}{OP}$ .

b) On note C' le point d'intersection entre (OP) et la perpendiculaire à (OP) passant par R. En calculant de deux façons le cosinus de l'angle $\widehat{MOP}$ montrer que OC = OC'.

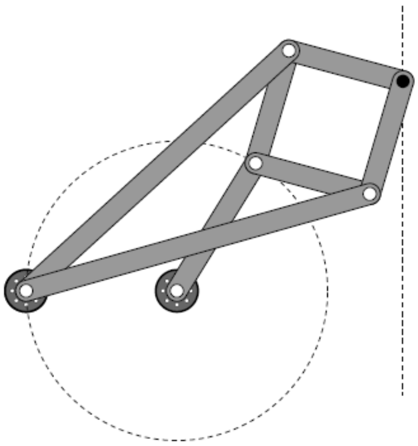
c) En déduire que l'angle $\widehat{OCR}$ est droit.

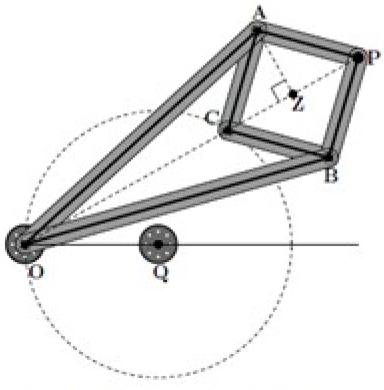
d) En déduire l'ensemble décrit par les points C quand P se déplace sur d.
e) En déduire que l'image du cercle de diamètre [OR] par l'inversion de centre O de puissance $k$ est incluse dans la droite d.

## II – Analysons la machine de Peaucellier

L'étude conduite dans la partie I montre que dans le cas de trois points alignés O, C, P tels que le produit OC × OP est constant (égal à $k$), lorsque le point C décrit le cercle de diamètre [OR], le point P décrit une droite (XY) (ou d).

Considérons la machine de Peaucellier dans laquelle OA = OB et ACBP est un losange :






Analyse de la machine de PEAUCELLIER

Par construction, C décrit un cercle de diamètre [OR] (où R est le symétrique de O par rapport à Q).
Il reste à vérifier que OC × OP est constant lors du mouvement du système articulé.

1. Montrer que les points O, C et P sont alignés, quelle que soit la position du système articulé.

2. Montrer que OC × OP est constant.
Indication : on pourra utiliser OC = OZ – ZP et OP = OZ + ZP.

3. Conclure.