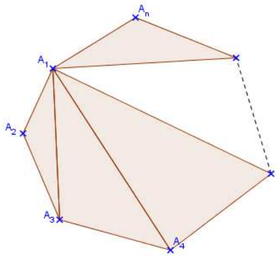
Des polygones manichéens
éléments de correction

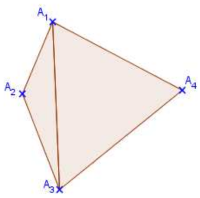


1 – Soient $A_1, A_2, ..A_n$ les n sommets du polygone P_n, nommés dans le sens trigonométrique. Les triangles $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, … $A_1A_{n-1}A_n$ sont n-2 triangles d'intérieurs disjoints dont la réunion forme P_n .

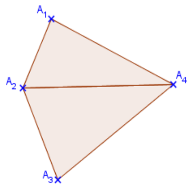
Autre méthode : Si n=3 il n'y a rien a faire.
Si n>3, on choisit un sommet et on retranche le triangle forme de ce sommet et de ses deux voisins de P_n .
Cela reduit le nombre de sommets de 1 et on peut iterer cela n-3 fois avant d'arriver au cas n=3.
Il y a donc n-3+1=n-2 triangles en tout.

N.B. Ces raisonnements ne prouvent pas que toute triangulation conporte n-2 triangles.

2 – a) Les triangulations comportant deux triangles de P_4 :

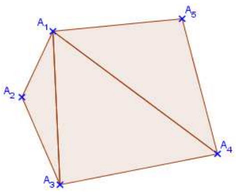


et



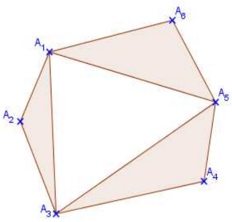
Sont les seules triangulations de P_4

b) Les triangulations comportant 3 triangles de P_5.



et quatre autres triangulation en remplaçant A_1 par A_2, puis par A_3 ...

c) Montrer que P_6 admet une triangulation dont au moins l'un des triangles n'a aucun côté au bord de P_6.



est une triangulation dont au moins l'un des triangles n'a aucun côté au bord de P_6.

3 – On peut toujours colorier les triangles d’une triangulation de P_n en noir et en blanc de telle sorte que deux triangles qui ont une arête commune ont des couleurs différentes, en effet : en reliant les centres de gravité des triangles adjacents par des segments, on voit apparaitre un arbre dont les sommets correspondent aux triangles.
Il est toujours possible de colorier les sommets d'un arbre en blanc et noir de facon à ce que les arêtes relient toujours un sommet blanc a un sommet noir.

4 – La seule triangulation de P_3 est admissible. P_4 et P_5 n'ont pas de triangulation admissible (cf figures ci-dessus) P_6 a une triangulation admissible : il suffit de colorier en noir les triangles extérieurs de la triangulation donnée à la question 2.

5 – P_3 a une triangulation admissible de même que P_6 . Pour passer de P_{3k} à P_{3k+3} , il suffit de remplacer deux côtés consécutifs de P_{3k} appartenant à un même triangle par un pentagone convenablement triangulé.
On obtient ainsi de proche en proche une triangulation de tout polygone dont le nombre de côté est un multiple de 3.

6 – Supposons que tous les triangles au bord d'une triangulation admissible de P_n soient noirs. Les n-2 triangles de la triangulation sont séparés par n-3 arêtes qui bordent toutes exactement un seul triangle blanc.
Le nombre de triangles blanc est donc donné par (n-3)/3 qui vaut k-1 si n=3k.

7 – Le raisonnement précédent montre que pour tout $k \geqslant 1$, P_{3k+1} et P_{3k+2} n’ont aucune triangulation admissible puisque dans ces cas (n-3)/3 n'est pas un entier.

Droite et ère industrielle : éléments de correction

I 1)

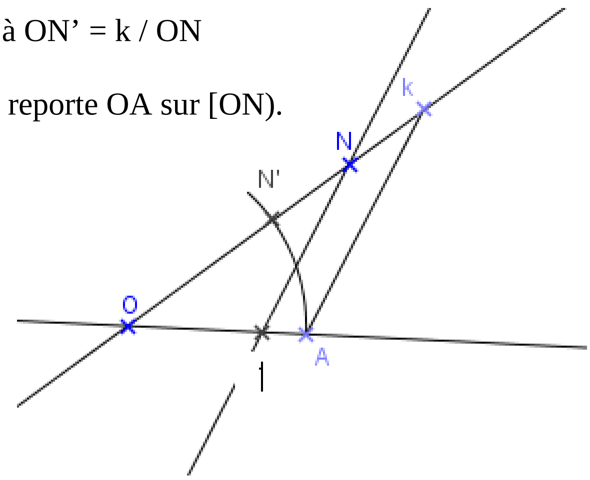
a) On place M’ sur [OM) à 1,5 cm de O

b) L’image de M’ est le point Z tel que Z est sur [OM’) avec OM’ x OZ = 6. Il s’agit donc du point M.

c) Le point O n’a pas d’image car d’une part la demi-droite [OO) n’est pas définie, d’autre part le produit de la distance OO avec n’importe quel réel donne 0 et non 6.

d) Si M est un point invariant, alors OM.OM = 6, soit OM² = 6, M est donc un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{6}$. Réciproquement, si M est un point de ce cercle, les points O, M et M sont alignés et vérifient OM.OM = 6, donc M est sa propre image.

e)Pour tout point N distinct de O, ON ON’ = k équivaut à ON’ = k / ON
ou encore ON’ / 1 = k / ON.
On utilise le théorème de Thales pour obtenir A, puis on reporte OA sur [ON).



2)

a) R est l’image de M donc OR.OM = k
C est l’image de P donc OC.OP = k
Ainsi OR.OM=OC.OP soit $\frac{OM}{OP} = \frac{OC}{OR}$

b) on a cos($\widehat{MOP}$)=OC'/OR dans le triangle OC’R, rectangle en C’
et cos($\widehat{MOP}$)=OM/OP dans le triangle OMP, rectangle en M.
Ainsi OC'/OR =OC/OR donc OC=OC' donc C=C’.

c) L’angle $\widehat{OCR}$ est droit puisque le triangle OC'R est rectangle en C’.

d) $\widehat{OCR}$ = 90° donc C appartient au cercle de diamètre [OR].
L’ensemble des points C est donc inclus dans le cercle de diamètre [OR].

e) Réciproquement, lorsque C est un point de ce cercle, autre que O, en désignant par P' le projeté orthogonal de P sur (OR), on montre (de la même manière) que P’ et M sont confondus. Donc P est sur la perpendiculaire à (OR) en M c'est-à-dire sur la droite d.

II

1) Le système articulé est construit tel que OA=OB, CA=CB et PA=PB.
Ainsi O, C et P sont trois points de la médiatrice de [AB], ils sont donc alignés.

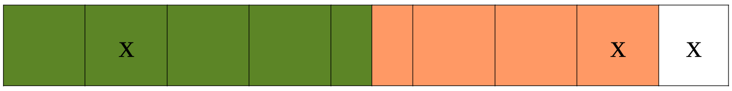
2) OC.OP = (OZ – CZ) (OZ + ZP) (O,C,Z,P alignés)
= (OZ – ZP) (OZ + ZP)
= OZ² - ZP ²
= (OA² - AZ²) – (AP² - AZ²) (Théorème de Pythagore dans les triangles AZO et AZP)
= OA² - AP² qui est constant.

3) Il résulte de la partie I que le point P se déplace sur la droite d, la machine de Peaucellier engendre donc un mouvement rectiligne.

CORRECTION DE L'EXERCICE ACADÉMIQUE n°4

A-Modèle 1 :

1.



L'habitant du carré 2 a une surface de 4,5 unités ; celui du carré 8 de 3,5 unités et celui du carré 9 , une unité.

2.
a) L'aire de la plus petite surface possible pour un habitant est une unité ou un carreau .En effet

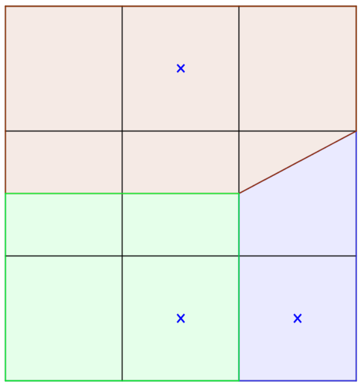
- Si l'habitant H est à l'extrémité de la ville, en position 1 ou A, alors (comme dans le remplissage précédent) l'habitant le plus proche ne peut être qu'en position 2 ou A-1. Donc H dispose d'au moins une unité.
- Si l'habitant n'est pas sur une extrémité, il peut être entre deux autres habitants et alors il dispose d'au moins une unité.

Conclusion : la plus petite surface possible pour un habitant est d'une unité (nous avons volontairement mis de côté les cas particuliers où il n'y a qu'un habitant).

b) Dans une ville de taille A avec N habitants,
- si N-1 habitants ont tous la surface minimale, c'est à dire une unité, alors le dernier habitant aura une surface de A-N+1 unités. Donc la surface la plus grande est au plus A-N+1.
- si l'on met tous les habitants sur les carrés numérotés de 1 à N, on constate que l'habitant situé sur la case N aura bien une surface de A-N+1 cases.

Conclusion : La plus grande surface possible pour un habitant est de A-N+1 unités (là encore nous avons écarté le cas où il n'y a qu'un habitant).

B – Modèle 2 :
1.



2 a pour surface 4,25 unités. 8 a pour surface 3 unités et 9 a pour surface 1,75 unités.

2.
a) L'aire de la surface moyenne par habitant est A/N
b) L'aire de la plus petite surface possible pour un habitant est d'une unité.
c) Prenons le cas A=9 et N=2.
Dans le cas d'une ville en bord de mer, la plus grande surface possible pour un habitant est 8 (un habitant en position 1 et l'autre en position 2).
Dans le cas d'une ville territoire carré, la plus grande surface possible pour un habitant est 7 (un habitant en position 1 et l'autre en position 5).
Conclusion : l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant n'a pas la même valeur que celle obtenue dans le modèle précédent, où la ville est située en bord de mer.