OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2011

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

Les exercices n° 1, 2, 3 et 4 seront traités par** **les élèves des sections** ***autres que S et STI**.***
Les exercices n° 1, 2, 3 et 5 seront traités par** **les élèves des sections** ***S et STI**.***

Exercice National 1 : *Essuie-glaces* **(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)**

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-contre). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

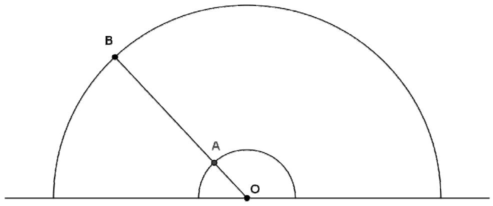


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-contre). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

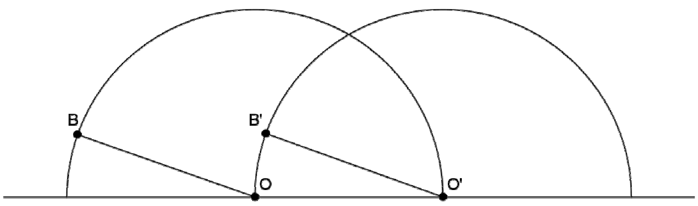


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-contre) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que ,

$\widehat{OCA}=30°$, CB = 4 CA et OC = $\sqrt{3}\times$CA .
On pose CA = a.

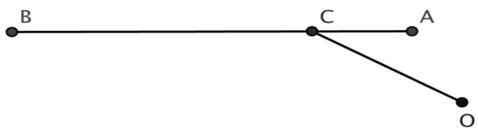


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

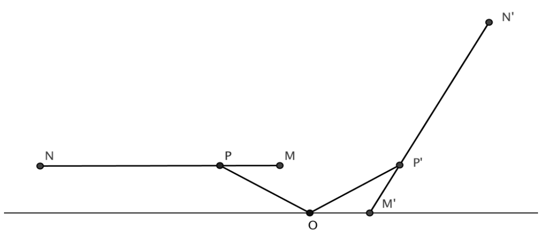


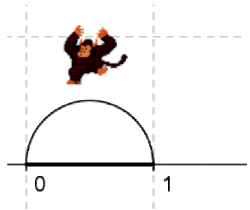
Fig. 4

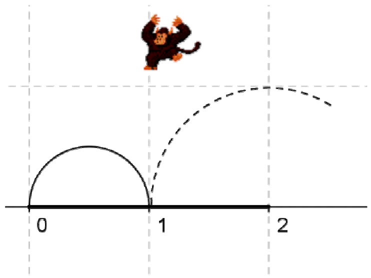
<u>Exercice National 2 :</u> ***Le singe sauteur.***

J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre *n* est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse *n* en **exactement** *n* bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, *n* (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment [0 ; *n*].

Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.

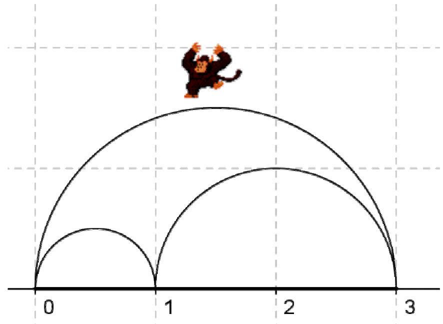




Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].

.

Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier *n* est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier *n* pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N ≥ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N+4 est aussi atteignable.

Exercice académique 3 : *Promenade dans les aires.*

Une formule simple était utilisée par les arpenteurs Egyptiens pour évaluer l'aire d'un quadrilatère :
« calculer le produit des moyennes des longueurs des côtés opposés » (formule A).
Une autre formule demande de
« calculer le demi produit des longueurs des diagonales » (formule B).

Il s'agit dans cet exercice d'étudier la validité de ces formules.

1 – Pensez-vous qu'il soit possible de calculer la valeur exacte de l'aire d'un quadrilatère quelconque à l'aide des seules mesures de ses côtés ? Justifier.

2 – Trouver un quadrilatère pour lequel la formule A est exacte et un quadrilatère pour lequel elle ne l'est pas. Justifier les réponses.

3 – Même question pour la formule B.

4 – Quels sont les rectangles pour lesquels les deux formules donnent le même résultat ?

5 – Montrer que l'aire du quadrilatère est toujours inférieure ou égale au résultat trouvé à l'aide de la formule B. Dans quels cas l'égalité a-t-elle lieu ?

6 – Soient Q un quadrilatère quelconque et Q' le quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés de Q.
a) Quelle est la nature du quadrilatère Q' ? Démontrer ce résultat.
b) Comparer l'aire du quadrilatère Q' à celle de Q.
c) En déduire que l'aire du quadrilatère Q est toujours inférieure ou égale au résultat trouvé à l'aide de la formule A. Dans quels cas l'égalité a-t-elle lieu ?

Exercice académique 4 : *Quel dé choisir ? (pour les élèves des sections autres que S et STI)*

Dans ce jeu, qui se joue à deux, les joueurs choisissent à tour de rôle un dé à six faces parmi les trois dés proposés ci-dessous puis les lancent en même temps. Le gagnant est celui des deux joueurs qui obtient le résultat le plus élevé.

Dé Rouge : six faces numérotées 4 – 4 – 4 – 4 – 4 - 4
Dé Bleu : six faces numérotées 2 – 2 – 2 – 2 – 8 – 8
Dé Vert : six faces numérotées 0 – 0 – 6 – 6 – 6 – 6

Ces trois dés sont supposés équilibrés.

Le maître du jeu dit que la numérotation des faces a été faite de façon à ce que le jeu soit équitable puisque la moyenne des chiffres inscrits sur les faces est la même quelque soit le dé choisi. Il prétend même vous avantager en vous demandant de faire votre choix en premier.

1 – Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le dé Rouge ?

2 – Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le dé Vert ?

3 – Le maître du jeu vous demande de choisir un dé puis choisit le sien.
a) Montrer que quelque soit votre choix, il a plus de chance de gagner que vous.
b) La participation au jeu coûte 1 € et vous recevez 2,50 € en cas de gain.
Ce jeu vous est-il favorable ?

4 – Le jeu est modifié de la façon suivante : le dé vert vous est attribué, et le maître du jeu tire au hasard l'un des deux dés restants.
Qui a maintenant le plus de chances de gagner ?

<u>Exercice académique 5 :</u> ***Des nombres qui volent*** ***(pour les élèves des sections S et STI)***

Soit N un nombre entier naturel non nul. On s'intéresse à la liste de nombres, numérotés u_0, u_1, u_2, u_3, …, construite de la façon suivante :

$u_0 = N$. Si un élément a de la liste est pair, son suivant est $\frac{a}{2}$ et s'il est impair son suivant est $3a+1$.

Ainsi, on a pour $N=5$: $u_0=5$, $u_1=16$, $u_2=8$, $u_3=4$, $u_4=2$, $u_5=1$, $u_6=4$, $u_7=2$ …
et pour $N=7$: $u_0=7$, $u_1=22$, $u_2=11$, $u_3=34$, $u_4=17$, $u_5=52$, $u_6=26$, $u_7=13$, $u_8=40$ …

1. On suppose que $N = 3$.
a) Déterminer les cinq premiers termes de la liste associée à ce nombre.
b) Quel est le plus petit entier m tel que $u_m = 1$?
c) Que peut-on dire des termes suivants ?

2. On suppose que $N = 7$.
a) Déterminer le plus petit entier m tel que $u_m = 1$. On dit que m est la **durée de vol du nombre *N*.**
b) Représenter graphiquement les 20 premiers termes de la liste.
On portera en abscisse l'entier i et en ordonnée le nombre u_i .
c) Quel est le plus grand terme de cette liste ? Il s'agit de **l'altitude maximale du vol du nombre *N*.**
d) Quel est le plus petit entier i tel que $u_{i+1} < N$? ***i* est la durée de vol de *N* en altitude.**
Illustrer sur votre graphique.

3. On suppose que $N = 11$.
a) Quelle est sa durée de vol ?
b) Quelle est sa durée de vol en altitude ?
c) Quelle est l'altitude maximale de son vol ?

Si N est un entier naturel non nul, on dit que **sa durée de vol est finie** s'il existe un entier naturel m tel que $u_m = 1$.
La conjecture de Syracuse affirme que tout nombre a une durée de vol finie. Elle n'a pas été démontrée à ce jour.

4. On suppose que le nombre N a une durée de vol finie.
Écrire un algorithme qui permette de calculer sa durée de vol.

5. Montrer que pour tout entier naturel non nul p, il existe au moins un entier N ayant une durée de vol égale à p.

6. Quels sont les nombres ayant une durée de vol en altitude nulle ?

7. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2 ayant une durée de vol finie. Justifier qu'il a une durée de vol en altitude finie.

8. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2, tel que :
- tout nombre entier inférieur à N a une durée de vol finie,
- N a une durée de vol en altitude finie.
Montrer que N a une durée de vol finie.

9. On peut écrire tout nombre entier naturel N sous l'une des formes $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
a) Montrer pour trois de ces quatre cas que le nombre N a une durée de vol en altitude finie.
b) Quels sont les nombres entiers naturels non nuls ayant une durée de vol en altitude égale à 2 ?

On démontre (ce résultat est ici admis) à partir des questions 8 et 9, que si N est un entier naturel non nul quelconque, les affirmations suivantes sont équivalentes :
a) Tout nombre inférieur ou égal à N a une durée de vol finie.
b) Tout nombre inférieur ou égal à N a une durée de vol en altitude finie.

10. a) Expliquer pourquoi, pour vérifier que les 10 000 premiers nombres entiers non nuls ont une durée de vol finie, il suffit de faire des calculs pour 2 500 nombres.
b) Écrire un algorithme qui permette, en effectuant le moins de calculs possibles, de déterminer l'entier naturel non nul inférieur ou égal à 10 000 ayant la durée de vol en altitude la plus longue. Justifier votre choix.

11. Proposer une méthode qui permette de limiter encore de façon significative les calculs à faire pour vérifier si les 10 000 premiers nombres entiers non nuls ont une durée de vol finie.