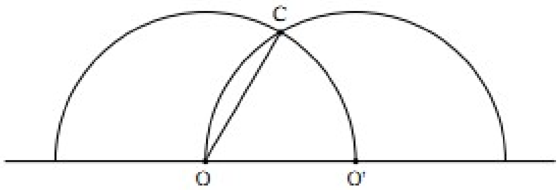
Corrigés des sujets nationaux

Premier exercice

Toutes séries

1. L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi \times 60^2 - \pi \times 15^2\right) = \frac{\pi}{2} \times 15^2\left(4^2 - 1\right) = \frac{\pi}{2} \times 15^3 = 3375 \times \frac{\pi}{2}$, soit, en valeur approchée : 5301 cm^2
2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons l'aire du triangle équilatéral OO'C de côté de longueur R et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de la portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\widehat{OC}$ sera $A_2 - A_1$.
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2A_1 = 2A_2A_1$;
Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4R^2}$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$$\mathcal{A} = \pi R^3 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 \text{ et donc } \mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$$

3. a. $\sin\widehat{OCH} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

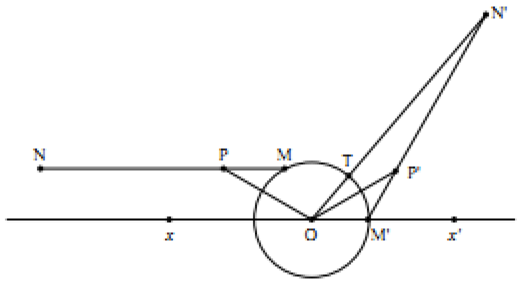
De même, $\frac{HC}{OC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$.
Enfin, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H, on a

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = (HC - CA)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2.$$

Ainsi $OA = OC$. Le triangle AOC est donc isocèle.

b. L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin.
Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2 \times 30 = 60^\circ$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure $180 - 60 = 120^\circ$

.



La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{NN'}$. Soient T et TŠ les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points M, T, N ont respectivement pour images M', T' et N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par [M'N'], [N'T'] et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.

Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [N'T'] et les arcs de cercle $\widehat{NN'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi \times ON^2 - \pi \times OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$.

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + (HC + CB)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc

$$A = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi\, a^2 \qquad \boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$$

1. Le nombre 4 est atteignable car $1 + 2 - 3 + 4 = 4$.
2. Le singe n'a que le choix : $1 + 2 - 3 + 4$ et ... il est bloqué ! !
3. Le nombre 9 est atteignable car on a $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 9$, sans jamais sortir de l'intervalle $[0\,;\,9]$.
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner $1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16$, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle $[0\,;\,16]$.
   L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :
   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n - (n+1) + (n+2) - (n+3) + (n+4)\cdots - (n^2 - 1) + n^2$$
   $$= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = n^2.$$
   d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle $[0\,;\,n^2]$.
5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que
   $$1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = 0.$$
   Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_- . On a alors : $S_+ = S_-$. On calcule ensuite :
   $$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = S_+ - S_- = 2S_+.$$
   On en déduit que $\frac{(n-1)n}{2} = 2S_+$, d'où $n(n-1) = 4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$.
   Donc n est de la forme $4k$ ou $4k + 1$. par exemple, 18 n'est pas atteignable.
   La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes $+-$ en $-+$, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ et l'on trouve $N+4$. On note $S(i)$ la somme partielle des i-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par $-(N-1)+N$. La séquence commence par $1+2+3$ et le premier signe $-$ apparaît en position $i+1$. Alors $S(i-1) \geqslant i$, car $S(3) \geqslant 4$. On change alors la sous-séquence $i-(i+1)$ en $-i+(i+1)$, ce qui est possible. On ajoute la séquence $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$, ce qui assure que $N+4$ est atteignable.
Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme $N = 4k$ ou $4k+1$, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?