OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2010

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

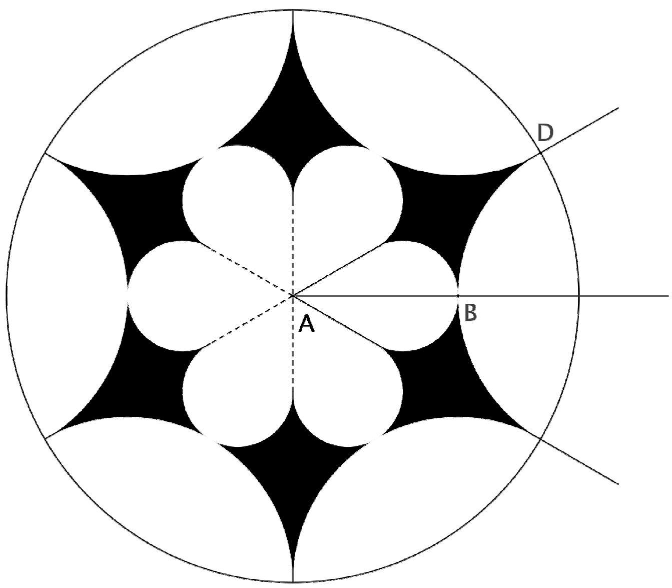
Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

***Les exercices n° 1, 2, 3 et 4 seront traités par** **les élèves des sections** **autres que S et STI**.*
***Les exercices n° 1, 2, 3 et 5 seront traités par** **les élèves des sections** **S et STI**.*

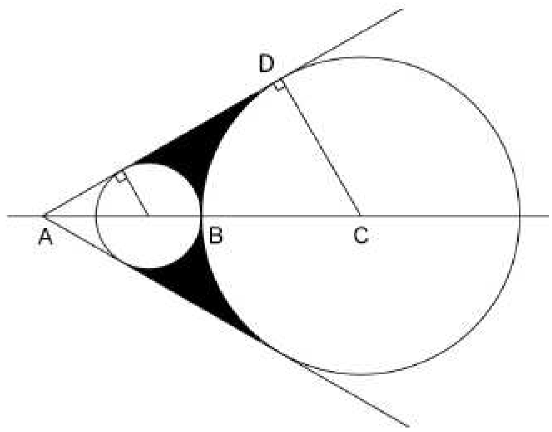
Exercice National 1 : *La Rosace*

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

<u>Exercice National 2 :</u> ***A la recherche du « chaînonze ».***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « a a ».

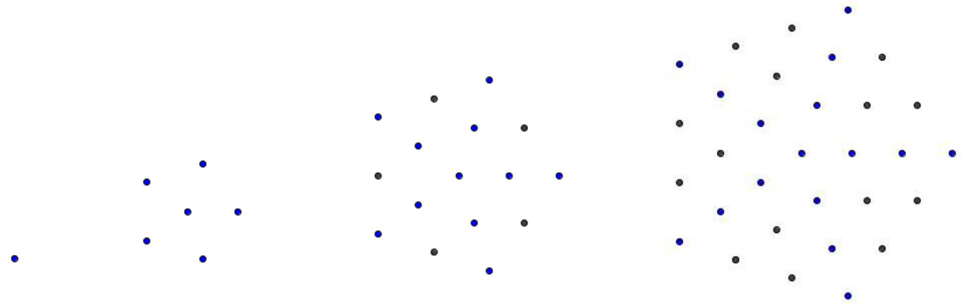
   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

<u>Exercice académique 3 :</u> ***Nombres pentagonaux centrés.***

Un **nombre pentagonal centré** est un nombre qui peut être représenté par un pentagone ayant un point placé en son centre et tous les autres points disposés autour de ce centre en formant des couches pentagonales successives. Les quatre premiers nombres pentagonaux sont 1, 6, 16 et 31 :



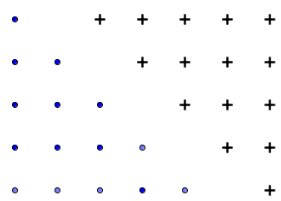
1 6 16 31

1. *a*. Quel est le $5^{\text{éme}}$ nombre pentagonal centré ?

   b. Combien de points faudra-t-il ajouter pour passer au $6^{\text{ème}}$ pentagone centré ?

2 . *a*. Montrer que pour tout entier naturel non nul *n*, $1+2+...+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

   On pourra pour cela observer la figure ci-dessous :



   b. En déduire que les nombres pentagonaux centrés peuvent tous être écrits sous la forme : $1+5\dfrac{(n-1)n}{2}$ où *n* est un entier naturel.

   c. 2176 est-il un nombre pentagonal centré ? Indiquer la méthode utilisée pour répondre.

2. *a*. Quels sont les chiffres des unités possibles pour un nombre pentagonal ?

   b. Pour quelles valeurs de *n* le $n^{\text{ième}}$ nombre pentagonal est il pair ?

   c. Quel est le chiffre des unités du $20092010^{\text{ème}}$ nombre pentagonal centré ?

<u>Exercice académique 4 :</u> ***Nombres mystérieux. (pour les élèves des sections autres que S et STI)***

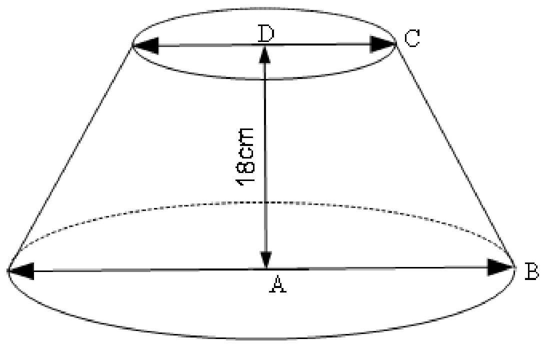
1. On considère un ensemble de trois nombres mystérieux dont on ne connaît que les sommes deux à deux. Ces sommes sont 5, 7, 8. Déterminer ces trois nombres mystérieux.

2. On considère maintenant cinq nombres mystérieux dont les sommes deux à deux sont 18, 24, 26, 28, 30, 36, 38, 42, 48, 50. Déterminer ces cinq nombres mystérieux.

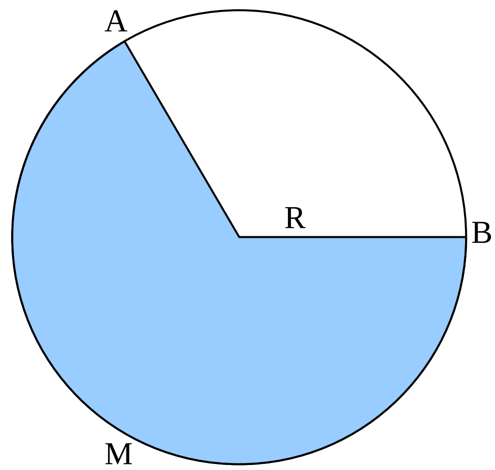
<u>Exercice académique 5 :</u> ***Variations autour du cône. (pour les élèves des sections S et STI)***

1 . Le dessin ci-contre représente un abat-jour conique.
Le diamètre du cercle de base est 30 cm, celui du cercle de tête (le cercle du haut) 15 cm, la hauteur 18 cm.
On décide de découper une pièce de tissu pour le garnir.

Réaliser un patron à l'échelle $\frac{1}{3}$. On rédigera les éléments de construction et fera figurer sur le dessin les points B et C.
La partie à découper devra être mise en évidence.



2 . On découpe dans un disque de rayon R un secteur angulaire pour former le patron d'un cône de révolution.
Le rapport de longueur entre l'arc intercepté par le secteur angulaire restant et le cercle est donc un réel compris entre 0 et 1. On le note x.
Par exemple : si $x = 0,75$ le secteur angulaire correspond aux trois quarts du disque.



Le but de cette question est de déterminer la valeur de x pour que le volume du cône soit maximal.

a . Calculer en fonction de x et de R :

- i . la longueur de l'arc de cercle intercepté par le secteur angulaire,
- ii . le rayon du cercle de base du cône,
- iii . le volume du cône.

b . Déterminer la valeur α de x pour laquelle le volume est maximal. On pourra chercher un encadrement de α.
Le calcul de la valeur exacte de α sera apprécié.