Exercice national 1

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2. *a*. <u>Première méthode :</u>
   Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
   La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Donc $\widehat{BCD} = 60^\circ$.
   Et puisque $BC = DC$, le triangle BCD est donc équilatéral.
   Ensuite, $\widehat{BDA} = 30^\circ$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $BD = BA$.
   Finalement, on trouve bien $AB = BC$.
   <u>Deuxième méthode :</u>
   On note R le rayon du grand cercle.
   On applique une formule de trigonométrie : $\sin \widehat{DAC} = \dfrac{DC}{AC}$, d'où $\sin 30^\circ = \dfrac{R}{AC}$.
   Puisque $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, on obtient $AC = 2R$.
   Or $BC = R$, d'où $AB = R$. Finalement $AB = BC$.

   b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.
   En appliquant le résultat précédent, il vient que $AE = 2r$. De plus, $EB = r$.
   On obtient donc $AB = 3r$, c'est-à-dire $R = 3r$.
3. On doit avoir $AD = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$. Puis $r = 1$.
4. Si $r = \dfrac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

   D'autre part, on a : $R = 3r = \dfrac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$.

   La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{BEF}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{BCD}$.

   Cette surface vaut donc $\dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{24}$.

   Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{2}$.

<u>Exercice national 2</u>

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010e terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3+x-2=0$ et $3+x-2=11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :

a. Si $b=a$, le prolongement est « $a\ b\ 0$ ».

b. Si $b=a-1$, c'est impossible car les équations $a+x-b=0$ et $a+x-b=11$ donnent $x=-1$ et $x=11-(a-b)=10$ qui ne sont pas des chiffres.

c. Si $b<a-1$, on a le chaînonze « $a\ b\ (11-a+b)$ » avec $(11-a+b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b<a-1$, on a $-10<b-a<-1$ d'où $1<11-a+b<10$.

d. Si $a<b$, « $a\ b\ (b-a)$ » avec $b-a$ est bien un chiffre car $0<b-a<10$.

Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b=a-1$) soit unique.

5. **1er cas : si $a=b$**

Si $a=b=0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.

Si $a=b=1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.
Si $a=b$ avec $a>1$, on obtient « $a\ a\ 0\ (11-a)\ (11-a)\ 0\ a\ a$ ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2e cas : $a=b+1$

la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3e cas : $a=0$ et $b=1$

« 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4e cas : $0<a<b$,

« $a\ b\ (b-a)\ (11-a)\ (11-b)\ (11+a-b)\ a\ b$ » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si

- $b-a=b-1$, c'est-à-dire $a=1$ et la chaîne est de longueur 3,
- $11-b=11-a-1$, c'est-à-dire $b=a+1$ et la chaîne est de longueur 5.

5^e cas : Si b = 0 et a > 1

le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6^e cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

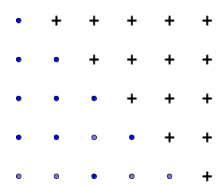
Exercice académique 3

Question 1

a) En complétant le quatrième pentagone, on constate que la figure suivante comporte 20 points supplémentaires, soit 51 au total.

b) Sur chacun des côtés du sixième pentagone construit, il y aura 6 points, mais les sommets du pentagone seront ainsi comptés deux fois.
Il faut donc ajouter $5\times 6-5=25$ points.

Question 2



a) La figure ci-contre est obtenue en accolant deux « triangles »formés chacun de $1 + 2 + \ldots (n - 1)$ points. Elle se compose de $n - 1$ lignes et n colonnes, et contient donc $n\times(n-1)$ points. On obtient alors la relation : $1+2+3+...+(n-1)=\frac{n\times(n-1)}{2}$

Autre méthode : la somme des $n - 1$ premiers termes d'une suite arithmétique...

b) Pour obtenir le $n^{\text{ième}}$ nombre pentagonal à partir du précédent, il suffit d'ajouter n points sur chacun des côtés du pentagone et de retrancher les cinq sommets qui sont comptés deux fois, ce qui revient à ajouter 5 fois n – 1 points.

Le $n^{\text{ième}}$ nombre pentagonal centré est donc :

$$1+5\times1+5\times2+5\times3+...+5\times(n-1)=1+5\times(1+2+...+(n-1))=1+5\times\frac{n\times(n-1)}{2}$$

c) On peut utiliser un tableau de valeurs ou résoudre l'équation du second degré $1+5\times\frac{n\times(n-1)}{2}=2176$ qui a pour seule solution positive $n = 30$

Question 3

a) L'observation des premiers nombres pentagonaux centrés : 1; 6 ; 16 ; 31 ; 51 ; 66 ou d'un tableau de valeurs d'une calculatrice permet de penser que le chiffre des unités est toujours 1 ou 6.

$1+2+3+...+n=\frac{n\times(n-1)}{2}$ étant bien entendu un entier, le nombre $5\times\frac{n\times(n-1)}{2}$ est un multiple de 5, son chiffre des unités est donc 0 ou 5, d'où l'on déduit que le chiffre des unités de $1+5\times\frac{n\times(n-1)}{2}$ est 1 ou 6.

b) Il semble que les nombres pentagonaux soient alternativement « impair », « pair », « pair », « impair »... selon un cycle de longueur 4.

Démontrons ce résultat :

si $\mathrm{n}=4\times\mathrm{k}$ où k est un nombre entier naturel, alors

$1+5\times\frac{(4\times k)\times(4\times k-1)}{2}=1+5\times(2\times k)\times(4\times k-1)$ qui est un nombre impair.

si $\mathrm{n}=4\times\mathrm{k}+1$ où k est un nombre entier naturel, alors

$1+5\times\frac{(4\times k+1)\times(4\times k)}{2}=1+5\times(4\times k+1)\times(2\times k)=2\times(5\times k\times(4\times k+1))+1$ qui est un nombre impair

si $\mathrm{n}=4\times\mathrm{k}+2$ où k est un nombre entier naturel, alors

$1+5\times\frac{(4\times k+2)\times(4\times k+1)}{2}=1+5\times(2\times k+1)\times(4\times k+1)$

qui est la somme de deux nombres impairs, ce qui prouve qu'il est pair.

si $\mathrm{n}=4\times\mathrm{k}+3$ où k est un nombre entier naturel, alors

$1+5\times\frac{(4\times k+3)\times(4\times k+2)}{2}=1+5\times(4\times k+3)\times(2\times k+1)$

qui est la somme de deux nombres impairs, ce qui prouve qu'il est pair.

c) 20092010 se termine par 10, c'est donc un nombre pair qui n'est pas multiple de 4, ce qui signifie qu'il est de la forme $\mathrm{n}=4\times\mathrm{k}+2$. e $20092010^{\text{ième}}$ nombre pentagonal centré est donc pair, il se termine donc par un 6.

Exercice académique 4

1. Notons ces nombres a, b, c. On a 5 + 7 + 8 = 20 = 2(A + B + C) car chaque nombre est impliqué dans deux sommes. Les trois nombres valent donc 10 - 5 = 5, 10 – 7 = 3, 10 – 8 = 2.
2. Notons ces nombres a, b, c, d, e en supposant a ≤ b ≤ c ≤ d ≤ e.
   On a 18 + 24 + 26 + 28 + 30 + 36 + 38 + 42 + 48 + 50 = 340 = 4(a + b + c + d + e)
   car chaque nombre est impliqué dans 5 – 1 = 4 sommes.
   On a nécessairement a + b= 18 et d + e= 50.
   On obtient donc c = 340/4 – 18 – 50 = 17.
   Comme on a maintenant 24 = a + c (car a + c ≤ a + d et a + c ≤ b + c,
   on obtient a =24-17= 7 et
   similairement 48=c + e = donne e = 48-17 = 31. De l'équation a + b = 17, on tire maintenant b = 11 et d + e = 50 fournit d= 50 – 31 = 19. Les cinq nombres mystérieux sont donc : 7,11,17,19,31.

Exercice académique 5

Question 1

ABCD est un trapèze rectangle avec AB = 15, AD = 18 et CD = 7,5.
Les droites (DC) et (AB) sont parallèles.
Appliquons le théorème de Thalès :

$$\frac{7{,}5}{\mathrm{OD}}=\frac{15}{\mathrm{OD}+18}\Leftrightarrow 7{,}5\,\mathrm{OD}+135=15\,\mathrm{OD}\Leftrightarrow \mathrm{OD}=18\ .$$

On trace les arcs de cercles de centre O passant par C et B.
Ils coupent la demi droite [OA) respectivement en E et F.
La longueur de l'arc géométrique $\overset{\frown}{\mathrm{ECM}}$ doit être égale à la longueur du cercle de centre D et de rayon DC.
Si α est la mesure en radians de $\widehat{\mathrm{EOM}}$ alors

$$\mathrm{OC}\times\alpha=2\pi\times7{,}5=15\pi\ .$$

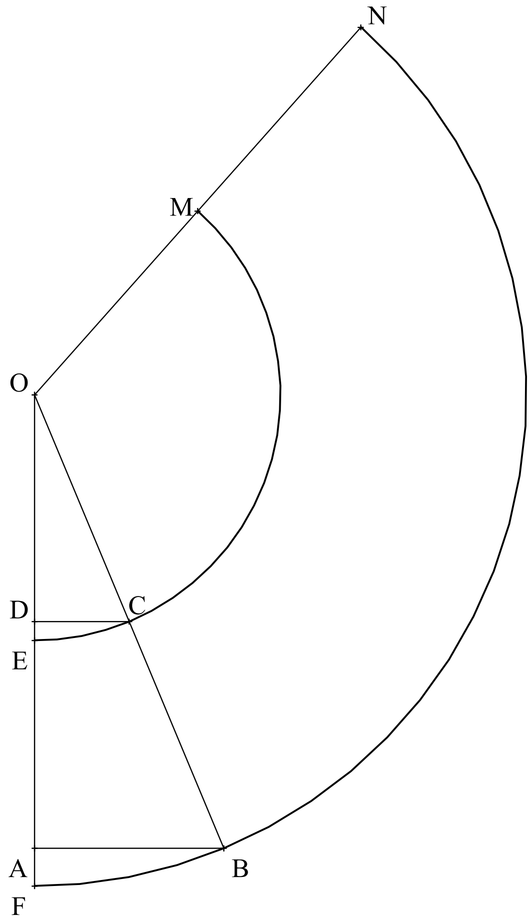
Donc $\mathrm{OC}=\sqrt{18^2+7{,}5^2}=19{,}5$ soit $\alpha=\dfrac{15\pi}{19{,}5}$.

La mesure en degrés de $\widehat{\mathrm{EOM}}$ est donc

$$\alpha\times\frac{180}{\pi}=\frac{15\pi\times180}{19{,}5\times\pi}=\frac{2700}{19{,}5}\approx138{,}46^\circ$$

Le patron ci-contre est à l'échelle 1/6.

On découpe la couronne délimitée par E, F, N et M.



Question 2

a.

i. Si m est la mesure en radians du secteur angulaire alors $l=R\times m=R\times(2\pi x)$ donc $\boxed{l=2\pi Rx}$.

ii. On note r le rayon du cercle de base du cône. On a : $2\pi r=R\times(2\pi x)$ donc $\boxed{r=Rx}$.

ii. La hauteur du cône est $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-R^2x^2}=R\sqrt{1-x^2}$.

Donc $V=\dfrac{1}{3}\times\text{aire de la base}\times\text{hauteur}=\dfrac{1}{3}\times\pi(Rx)^2(R\sqrt{1-x^2})$

Soit $\boxed{V=\dfrac{1}{3}\pi R^3(x^2\sqrt{1-x^2})}$.

b.

Le volume est maximal lorsque $x^2\sqrt{1-x^2}$ l'est ou encore lorsque $x^4(1-x^2)$ est maximal.
On étudie le sens de variation de la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=x^4(1-x^2)=x^4-x^6$.

Elle est dérivable sur [0 ; 1] et pour tout $x\in[0\ ;1]$, $f'(x)=4x^3-6x^5=2x^3(2-3x^2)$.
Sur [0 ; 1], le signe de $f'(x)$ est de celui de $2-3x^2$. D'où le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1
$f'(x)$	0	+	0	–	
$f(x)$	0	↗	Max	↘	0

Le volume est donc maximal lorsque $\boxed{x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$.