OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2009

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

Les exercices n° 1, 2, 4 et 5 seront traités par** <u>**les élèves des sections** ***autres que S et STI</u>**.***
Les exercices n° 1, 2, 3 et 5 seront traités par** <u>**les élèves des sections** ***S et STI</u>**.***

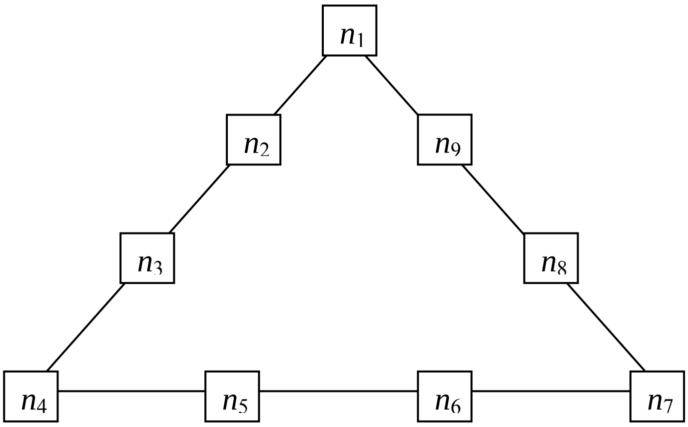
EXERCICE 1 : (<u>pour tous les élèves</u>).

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

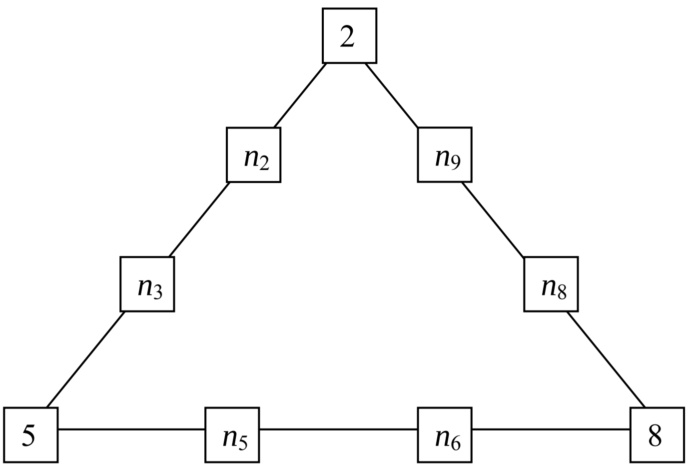


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de *S*.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire *S*-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.

b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$

c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.

b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

EXERCICE 2 : (<u>pour tous les élèves</u>).

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

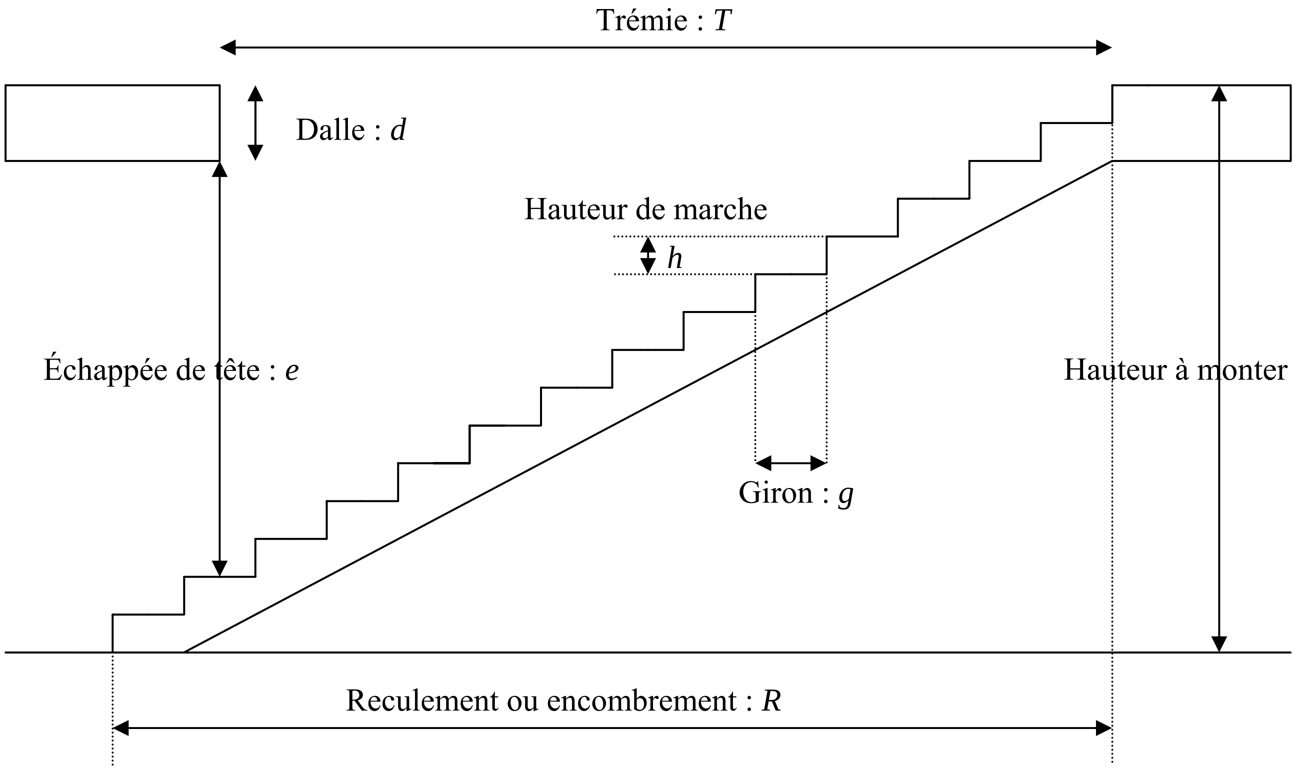
4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

EXERCICE 3 : (<u>pour les élèves des sections *S et STI*</u>).

En 1675, François Blondel se penche sur la question du calcul de l'escalier dans son *Cours d'architecture enseigné à l'académie royale d'architecture*. Il constate « qu'à chaque fois qu'on s'élève d'un pouce, la valeur de la partie horizontale se trouve réduite de deux pouces et que la somme du double de la hauteur de la marche et de son giron doit demeurer constante et être de deux pieds ».
Autrement dit : $M = 2h + g$, où M est le module ou pas et vaut 2 pieds (64,8 cm), h la hauteur de la marche, et g son giron (profondeur d'une marche d'escalier mesurée en son milieu).
L'idée directrice est que l'effort fait par la personne qui monte soit constant que l'escalier soit ou non droit.

De nos jours, le pas usuel est de 63 cm.
Ainsi on a : $2h + g = 63$.
Dans cet exercice toutes les longueurs sont exprimées en centimètres. Les réponses seront arrondies à 0,1 cm.



Dans les constructions modernes l'échappée de tête doit être d'au moins 2 mètres.
Dans l'étude qui suit, la hauteur à monter H est de 3 mètres, la dalle a une épaisseur de 30 centimètres.
Un escalier est déterminé par le nombre de marches, leur hauteur et leur giron.

1- On réalise un escalier droit de 19 marches. La trémie mesure 4,8 mètres. Calculer le giron, le reculement et l'échappée de tête de l'escalier.
2- On dispose d'un reculement maximum de 4 mètres. Calculer les dimensions de l'escalier le moins pentu possible. Quelle doit être la dimension minimale de la trémie ?
3- On dispose d'une trémie de 2,60 mètres. Quelles sont les dimensions de l'escalier le moins pentu possible ? Quel est son reculement ?

EXERCICE 4 : (<u>pour les élèves des sections *autres que S et STI*</u>).

On appelle fraction unitaire ou fraction égyptienne une fraction d'entiers dont le numérateur est égal à 1.
On démontre et nous admettrons que toute fraction comprise entre 0 et 1 peut s'exprimer comme somme de fractions unitaires dont tous les dénominateurs sont distincts deux à deux.
Cette somme est appelée un développement égyptien.
Par exemple : $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ est un développement égyptien.

1- Donner un développement égyptien en une somme de deux fractions de :

a. $\frac{3}{20}$

b. $\frac{2}{17}$

2- Montrer qu'aucune fraction strictement comprise entre $\frac{5}{6}$ et 1 ne peut se décomposer comme somme de 2 fractions égyptiennes.

3- Donner un développement égyptien en une somme de trois fractions de :

a. $\frac{19}{20}$

b. $\frac{5}{121}$

c. $\frac{4}{17}$

EXERCICE 5 : (<u>pour tous les élèves</u>).
Voici un petit jeu. Au départ, on dispose de 16 cases numérotées comme indiquées ci-dessous.

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

On s'autorise à faire autant de fois que l'on veut les actions suivantes :

- Choisir les deux premières lignes ou les deux dernières et les échanger.
- Choisir les deux premières colonnes ou les deux dernières et les échanger.
- Choisir une ligne ou une colonne et échanger le premier terme avec le dernier et le deuxième avec le troisième.

1- Montrer que l'on peut obtenir la position suivante :

22	21	24	23
12	11	14	13
42	41	44	43
32	31	34	33

2- Peut-on obtenir n'importe quelle position ? Si oui pourquoi, sinon donner une position impossible et expliquer pourquoi.