Éléments de correction :

Exercice 1 :

Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)

2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

```
         2
      7     1
   6           9
5     3     4     8
```

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\dfrac{6+45}{3} \leq S \leq \dfrac{24+45}{3}$ (cf. partie A)

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

```
         1
      8     4
   6           9
2     5     7     3
```

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

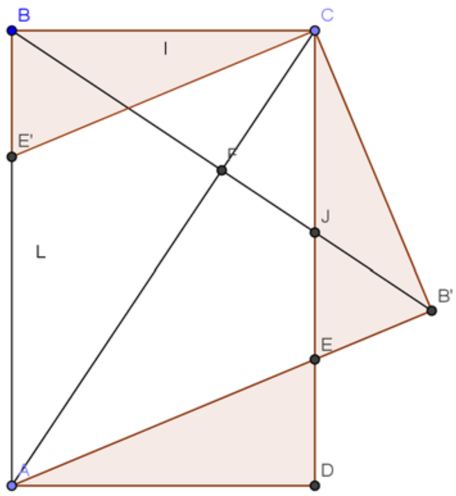
b. Triangle 19-magique

```
         7
      4     1
   5           9
3     8     6     2
```

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.

Exercice 2 :



2- Sachant que AE'CE est un losange on a : $(16-c)^2+8^2=c^2$ soit c = 10

3- On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$ avec $L\geq 8$
soit : $l^2=L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent bien à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l=0{,}25Ll$ d'où $c=0{,}75L$ d'où $L^2=2l^2$ d'où $l=\dfrac{\sqrt{2}}{2}L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Remarque : Sauf dans le cas où la figure de départ est un carré (identique à la figure d'arrivée, donc un losange), la figure CB'E est bien un triangle extérieur au rectangle ABCD, c'est-à-dire la partie enlevée.
(Il suffirait de dire que FJ < FB' car le triangle AJC a une aire inférieure au triangle ABC, triangles de même base et donc de hauteurs sont classées dans l'ordre souhaité)

Exercice 3 :

Principales formules $h\text{ (hauteur d'une marche)} = \dfrac{H\text{ (hauteur à monter)}}{n\text{ (nombre de marches)}}$ et

$R\text{ (reculement)} = (n-1)\times g\text{ (giron)}$.

1- n est le nombre de marches.

Dans cette question, n = 19 donc $h = \dfrac{300}{19} \approx 15{,}8\text{cm}$.

$g = 63 - 2h = 63 - 2\times\left(\dfrac{300}{19}\right) \approx 31{,}4\text{cm}$.

$R = (n-1)g = 18\times\left(63 - \dfrac{600}{19}\right) \approx 565{,}6\text{cm}$.

Le nombre de marches descendues est alors de $\mathrm{E}\left(\dfrac{T}{g}\right)+1 \approx \mathrm{E}\left(\dfrac{480}{31{,}4}\right)+1 = 16$.

L'échappée de tête est donc égale à $e = 16h - 30 \approx 16\times\dfrac{300}{19} - 30 \approx 222{,}6\text{cm}$.

2- Dans cette question, on doit avoir $R = (n-1)\left(63 - \dfrac{600}{n}\right) \leq 400$.

Résolvons cette inéquation. Elle équivaut à
$(n-1)(63n-600) \leq 400n \Leftrightarrow 63n^2 - 63n - 600n + 600 \leq 400n \Leftrightarrow 63n^2 - 1063n + 600 \leq 0$.

On a Δ = 978769 puis $n_1 = \dfrac{1063 - \sqrt{\Delta}}{2\times 63} \approx 0{,}58$ et $n_2 = \dfrac{1063 + \sqrt{\Delta}}{2\times 63} \approx 16{,}30$.
16 est le plus grand nombre possible de marches.
L'escalier comporte donc 16 marches d'une hauteur de 18,75 cm.
Le giron est alors de $63 - 2\times 18{,}75 = 25{,}5\text{cm}$.
On note x le nombre de marches descendues. On doit avoir
$\dfrac{230}{x} \leq 18{,}75 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{230}{18{,}75} \approx 12{,}27$.

Il faut descendre d'au moins 12 marches : la trémie vérifie donc $T \geq 12\times 25{,}5$. Elle doit donc dépasser 306 cm.
MAIS, dans l'hypothèse où T=306,1 la distance entre le bord de la dalle et le nez de la marche serait alors très voisine de 12*18,75-30=195 cm. (<200cm).
La résolution du problème est en réalité plus compliquée que cela. Il faudrait considérer que l'échappée de tête est, non pas la distance verticale entre la dalle et la marche, mais la distance entre la dalle et le nez de la marche.

3- Pour que l'échappée soit d'au moins deux mètres on doit avoir
$$\left[\mathrm{E}\left(\dfrac{T}{63 - \dfrac{2H}{n}}\right)+1\right]\times\dfrac{H}{n} \geq 230.$$
Utilisons la table de la calculatrice : $Y_1 = 260/(63 - 600/X)$ et $Y_2 = (\mathrm{int}(Y_1)+1)*300/X$.

Si $n = 14$, alors $e \approx 278{,}6$ cm,
si $n = 15$, alors $e \approx 240$ cm,
si $n = 16$, alors $e \approx 206{,}3$ cm.

L'escalier doit comporter 15 marches, d'une hauteur de 20 cm. Le reculement est alors de $(15-1)\times(60-2\times 20)=322\text{cm}$.

Autre méthode

On doit avoir $\dfrac{260}{63-\dfrac{600}{n}}\times\dfrac{300}{n}\le 230\le\left(\dfrac{260}{63-\dfrac{600}{n}}+1\right)\times\dfrac{300}{n}\Leftrightarrow$

$\dfrac{260\times 300}{63n-600}\le 230\le\dfrac{260\times 300}{63n-600}+\dfrac{300}{n}$

Le giron est positif donc :

$78000\le 230(63n-600)\Leftrightarrow 230\times 63n\ge 78000+230\times 600\Leftrightarrow n\ge\dfrac{216000}{230\times 63}\approx 14{,}9$.

La deuxième inégalité conduit à $14490n^2-234900n+180000\le 0$.

n doit être compris entre 1 et 15.

L'escalier comporte 15 marches d'une hauteur de 20 cm. Le giron est alors de 23 cm. Le reculement est 322 cm.

<u>Exercice 4 :</u>

1- a. On a $\dfrac{1}{7}<\dfrac{3}{20}<\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{3}{20}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{140}$ donc $\dfrac{3}{20}=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{140}$

b. . On a $\dfrac{1}{9}<\dfrac{2}{17}<\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{2}{17}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{153}$ donc $\dfrac{2}{17}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{153}$

2- La plus grande somme réalisable avec deux fractions égyptiennes distinctes est **:** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$

3- Il existe de nombreuses méthodes et différents résultats possibles pour cette question. On peut par exemple prendre :

a. $\dfrac{19}{20}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$

b. $\dfrac{5}{121}=\dfrac{1}{33}+\dfrac{1}{121}+\dfrac{1}{363}$

c. $\dfrac{4}{17}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{510}$

<u>Exercice 5 :</u>

1- On échange les 2 premières colonnes
on échange les 2 dernières colonnes
on échange les 2 premières lignes
on échange les 2 dernières lignes
Et on arrive au résultats désiré.

2- Non car chaque « opération autorisée » échange un nombre pair de « paires de cases ».
Ainsi tout échange d'une seule paire ne peut-être obtenue.
Ainsi la position

12	11	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

ne peut-être obtenue.