OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2008

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

Les exercices n° 1., 2., 3. et 4. seront traités par **les élèves de toutes les sections.**

EXERCICE 1 :

Dans une tour, un architecte a fait installer un ascenseur qui ne possède que deux boutons : le premier bouton permet à l'ascenseur de monter de 4 étages si le nombre d'étages de l'immeuble le permet, sinon l'ascenseur ne bouge pas. L'autre bouton permet à l'ascenseur de descendre de 7 étages si bien entendu le niveau où se situe l'ascenseur le permet, sinon il reste immobile.
De plus, on sait que si l'immeuble avait eu un étage de moins, la programmation n'aurait pas permis de servir tous les étages.

1. Combien l'immeuble a-t-il d'étages ?
2. L'ascenseur est au rez-de-chaussée et vous habitez au $7^{\text{ème}}$ étage. Quel nombre minimum d'arrêts est nécessaire pour rejoindre votre appartement ?

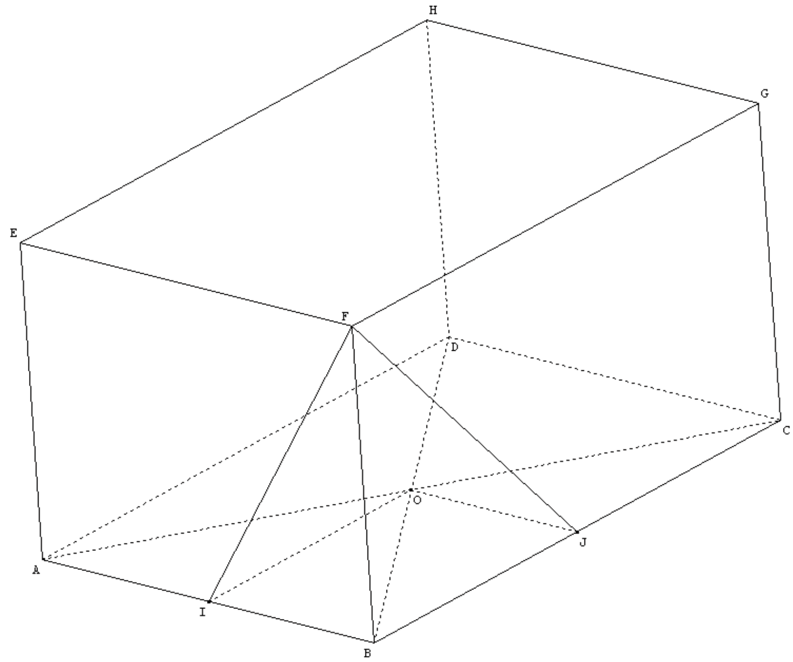
EXERCICE 2 :

Une salle rectangulaire a une largeur de 4 mètres (AB = 4), une longueur de 5 mètres (BC = 5), une hauteur de 3 mètres (BF = 3).
Une fourmi (non volante), ne se déplaçant qu'en ligne droite, est au coin F du plafond et veut atteindre par le plus court chemin une miette de pain située sur le plancher au centre de la pièce en O. Elle doit donc déterminer le plus court chemin pour aller de F à O en se déplaçant sur le plafond, le plancher et les murs de la pièce.

1. Elle envisage les trois parcours suivants :
   - Se déplacer le long de l'arête FB puis sur le plancher en suivant la diagonale du rectangle ABCD pour relier B à O
   - Passer sur la face FBAE pour atteindre le point I milieu de [AB] puis sur le plancher suivant la médiane du rectangle ABCD pour relier I à O
   - Passer sur la face FBCG pour atteindre le point J milieu de [BC] puis sur le plancher suivant la médiane du rectangle ABCD pour relier J à O.

   Comparez les longueurs de ces trois parcours.

2. Déterminer le parcours le plus court possible que devra emprunter la fourmi pour relier F à O.



AB = 4 ; BC = 5 ; BF = 3

EXERCICE 3 :

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

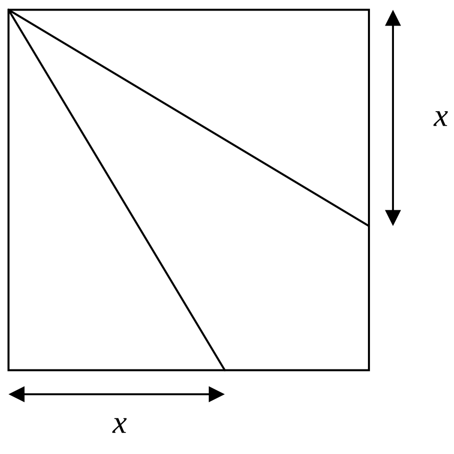
$2=1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3=1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3=1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

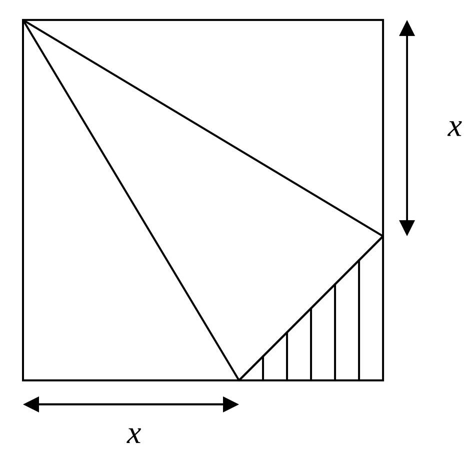
EXERCICE 4 :

Un partage équitable



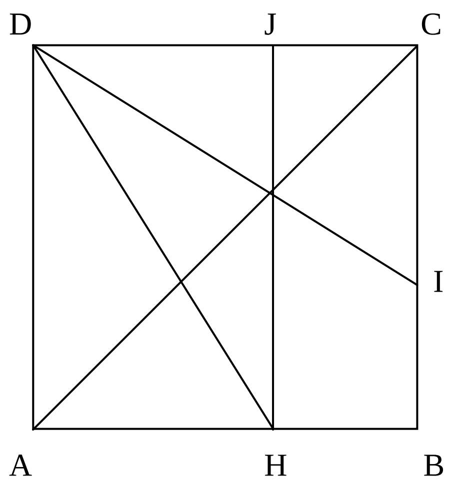
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?