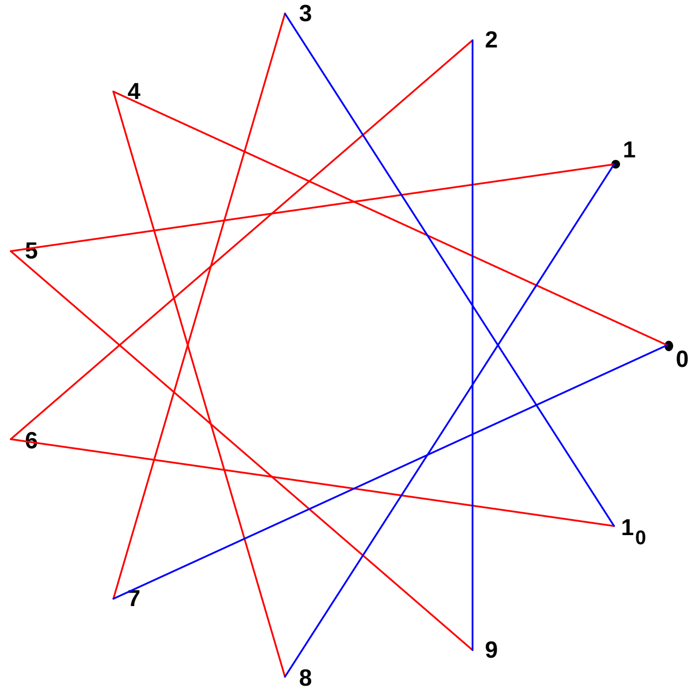
Olympiade 2008

Eléments de correction.

## Exercice 1

**1.**




En rouge : les étages atteints en montant 4 étages
En bleu : les étages atteints en descendant 7 étages.
Avec 11 niveaux, tous les étages sont reliés entre eux.
Donc l'immeuble possède 10 étages

2. En se positionnant au niveau 0 , il faut monter au 4$^{\text{ème}}$ puis monter au 8$^{\text{ème}}$ puis descendre au 1$^{\text{er}}$, monter au 5$^{\text{ème}}$, monter au 9$^{\text{ème}}$, descendre au 2$^{\text{ème}}$…..Donc il faut 9 arrêts avant d'arriver au 7$^{\text{ème}}$ étage en partant du rez-de-chaussée.

## Exercice 2

Patron de la pièce :

1. Chemin FBO : $3+\sqrt{4+6{,}25}=3+\sqrt{10{,}25}\approx 6{,}20$

Chemin FIO : $\sqrt{4+9}+2{,}5=2{,}5+\sqrt{13}\approx 6{,}11$

Chemin FJO : $\sqrt{9+6{,}25}+2=2+\sqrt{15{,}25}\approx 5{,}90$

2. En raisonnant sur le patron, chemin le plus court obtenu lorsque les points sont alignés

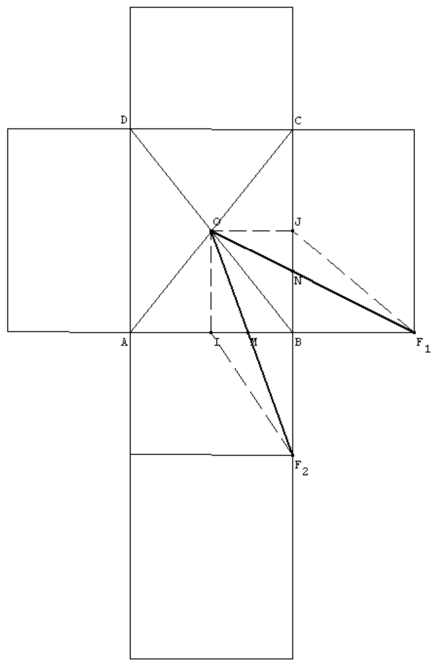
Chemin $F_2MO$ : $\sqrt{2^2+5{,}5^2}=\sqrt{34{,}25}\approx 5{,}85$ ; chemin $F_1NO$ : $\sqrt{5^2+2{,}5^2}=\sqrt{31{,}25}\approx 5{,}59$, le chemin le plus court est celui qui passe par la face BFGC.

En appliquant th Thalès, on obtient BN = 1,5.

Solution analytique :

On pose BM = $y$, $0\le y\le 2$, le chemin FMO a pour longueur $\sqrt{9+y^2}+\sqrt{10{,}25-4y+y^2}$

On pose BN = $x$, $0\le x\le 2{,}5$, le chemin FNO a pour longueur $\sqrt{9+x^2}+\sqrt{10{,}25-5x+x^2}$




## Exercice 3

1. $4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc $\boxed{\text{4 est bon}}$.

   Remarquons que comme $\frac{1}{1} = 1$, 1 est bon mais le nombre 1 ne peut entrer dans une décomposition d'un autre nombre que 1 puisque si $n = 1 + \ldots$, alors $\frac{1}{1} + \frac{1}{\ldots} + \ldots > 1$.

   Remarquons aussi que l'ordre n'intervient du fait de la commutativité de l'addition donc on peut supposer qu'on écrit $n$ comme une somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ avec la condition $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$.

   Pour 5, la seule décomposition possible est donc $5 = 2 + 3$ et comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$, $\boxed{\text{5 est mauvais}}$.

   Pour 6, les décompositions possibles sont :

- $6 = 2 + 2 + 2$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$

- $6 = 2 + 4$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$

- $6 = 3 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$ donc $\boxed{\text{6 est mauvais}}$.

Pour 7, les décompositions possibles sont :

- $7 = 2 + 2 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$

- $7 = 2 + 5$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \neq 1$

- $7 = 3 + 4$ mais $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \neq 1$ donc $\boxed{\text{7 est mauvais}}$.

Pour 8, les décompositions possibles sont :

- $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$

- $8 = 2 + 2 + 4$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$

- $8 = 2 + 3 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$

- $8 = 2 + 6$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \neq 1$

- $8 = 3 + 5$ mais $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq 1$

- $8 = 4 + 4$ mais $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq 1$ donc $\boxed{\text{8 est mauvais}}$

La décomposition $9 = 3 + 3 + 3$ avec $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ montre que $\boxed{\text{9 est bon}}$

La décomposition $10 = 2 + 4 + 4$ avec $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ montre que $\boxed{\text{10 est bon}}$

2. Il suffit d'écrire $a = b^2 = b \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{b \text{ fois}}$ avec $\underbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}}_{b \text{ fois}} = b \times \frac{1}{b} = 1$

pour justifier que tout carré parfait $a$ est bon.

3. Si $n$ est bon, $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ avec $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1$, alors

a. $2n + 2 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 2$ et

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$$

donc $2n + 2$ est bon.

b. $2n + 9 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 3 + 6$

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$$

donc $2n + 9$ est bon.

4. Soit $a$ un nombre tel que $a \geq 55$.

Supposons que tout nombre $k$ de l'intervalle $[\![24; a]\!]$ soit bon.

Comme $24 \leq k \leq a$ , il vient donc $a \leq 50 \leq 2k + 2 \leq 2a + 2$

et comme $2k + 2$ est bon, tout nombre pair de l'intervalle $[\![a; 2a]\!]$ est bon.

Comme $24 \leq k \leq a$ , il vient donc $57 \leq 2k + 9 \leq 2a + 9$ et comme $a \geq 55$ et que 55 est bon, comme de plus $2k + 9$ est bon, tout nombre impair de l'intervalle $[\![a; 2a]\!]$ est bon.

Ainsi tout nombre de $[\![a; 2a]\!]$ est bon et donc tout nombre de $[\![24; 2a]\!]$ est bon.

On agrandit ainsi l'intervalle des bons de $[\![24; a]\!]$ à $[\![24; 2a]\!]$.

Or $[\![24; 55]\!]$ est un intervalle de bons. Donc $[\![24; 110]\!]$, puis $[\![24; 220]\!]$ etc…

En réitérant le processus à l'infini, on montre que tout entier naturel supérieur ou égal à 24 finit par être dans un tel intervalle donc est bon.

## Exercice 4

Question 1

Chaque triangle rectangle aura une aire égale au tiers de l'aire du carré.

Il vient $\dfrac{x \times 1}{2} = \dfrac{1}{3}$ soit :

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}.$$

Question 2

L'aire du petit triangle est égale à $\dfrac{(1-x)^2}{2}$, donc l'aire de chaque triangle rectangle sera le tiers de l'aire restante.

Il vient $\dfrac{x \times 1}{2} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{(1-x)^2}{2}\right)$ soit $x^2 + x = 1$ soit comme $x > 0$ :

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618}$$

Question 2

Il existe de multiples solutions (analytiques ou autres…), la plus jolie me semble une application immédiate des propriétés du nombre $x$, par le seul fait qu'il est solution de $x^2 + x = 1$, et donc sans utiliser sa valeur.

Soit K le point d'intersection des droites (HJ) et (DI).

En appliquant le thèorème de Thalès dans le triangle (ICD), il vient : $\dfrac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JK}} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CI}}$ soit $\dfrac{x}{\mathrm{JK}} = \dfrac{1}{x}$

d'où $\mathrm{JK} = x^2 = 1 - x = \mathrm{JC}$.

Donc le triangle CJK est rectangle et isocèle donc $\widehat{JCK} = 45°$.

Ainsi C, K et A sont alignés. Autrement dit

$$\boxed{\text{les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes}}$$