OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION DE 2007

CLASSE DE PREMIÈRE **DURÉE : 4 heures**

Les calculatrices sont autorisées.
Le sujet comporte 4 pages.
Le candidat traitera les quatre exercices.
L'exercice 3 est différent selon que le candidat est en série S ou STI ou dans une autre série de première.

Exercice 1

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple :

- Une répartition possible au départ sera notée (4,3) ; elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets.
- Après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2).

Avertissement : On considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1 - On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2 - Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3 - Paul et Virginie jouent ensemble.
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie.
Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice 2

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1 - Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

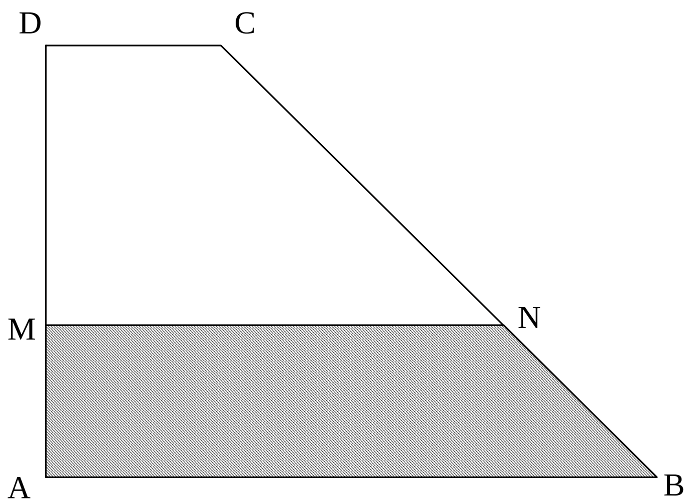
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2 - On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ tels que :

- $\widehat{\mathrm{B}} = 45°$.
- Les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD > 2.

Soit M le point du segment $[\mathrm{AD}]$ tel que $\mathrm{AM} = 2$.



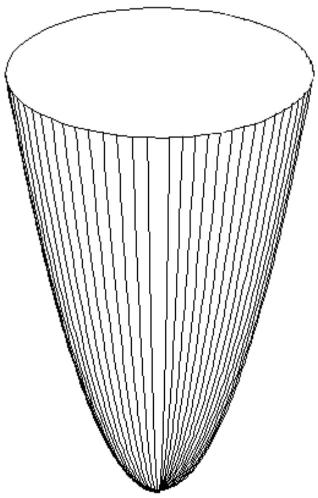
Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

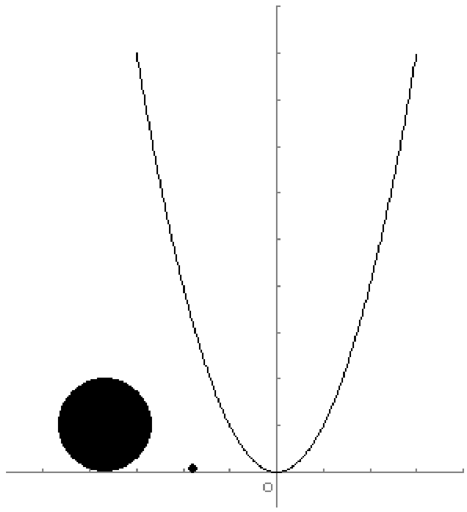
Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Exercice 3 – Séries S et STI

Deux billes dans une urne

Une urne a la forme d'un paraboloïde de révolution de hauteur 9 (l'unité est le centimètre). La section de ce paraboloïde par un plan passant par son axe est la parabole dont une équation dans un repère orthonormal bien choisi est $y = x^2$.





1 - On fait tomber dans l'urne une bille sphérique B de rayon 0,1.
La bille B va-t-elle toucher le fond de l'urne ?

2 - On fait tomber dans l'urne une seconde bille sphérique B' de rayon 1.
La bille B' va-t-elle toucher la bille B ?

Exercice 3 – Séries autres que S et STI

Les nombres palindromes

Un nombre naturel est un palindrome s'il conserve sa valeur quand on inverse l'ordre de ses chiffres.

Exemples : 12321, 341143, 7 sont des palindromes, 12341 ne l'est pas.

1 - Combien y a-t-il de nombres palindromes ne contenant pas le chiffre 0 qui sont strictement inférieurs à 1000 ?

2 - Combien y a-t-il de nombres palindromes ne contenant pas le chiffre 0 qui sont strictement inférieurs à 2000 ?

3 - Combien y a-t-il de nombres palindromes ne contenant pas le chiffre 0 qui sont strictement inférieurs à 1234567 ?

Exercice 4

Jeu de cubes

On dispose de cubes en bois blanc tous identiques et on désire les peindre de façon à obtenir des cubes différents, chaque face d'un cube étant unicolore.

1 - On dispose de deux tubes de peinture, l'un de couleur rouge, l'autre de couleur noire. Combien de cubes bicolores différents peut-on obtenir ?

2 - On dispose de six tubes de peinture de couleurs différentes et on utilise exactement les six couleurs (c'est à dire qu'il n'y a pas deux faces colorées avec la même couleur) pour peindre chaque cube. Combien de cubes différents peut-on obtenir ?