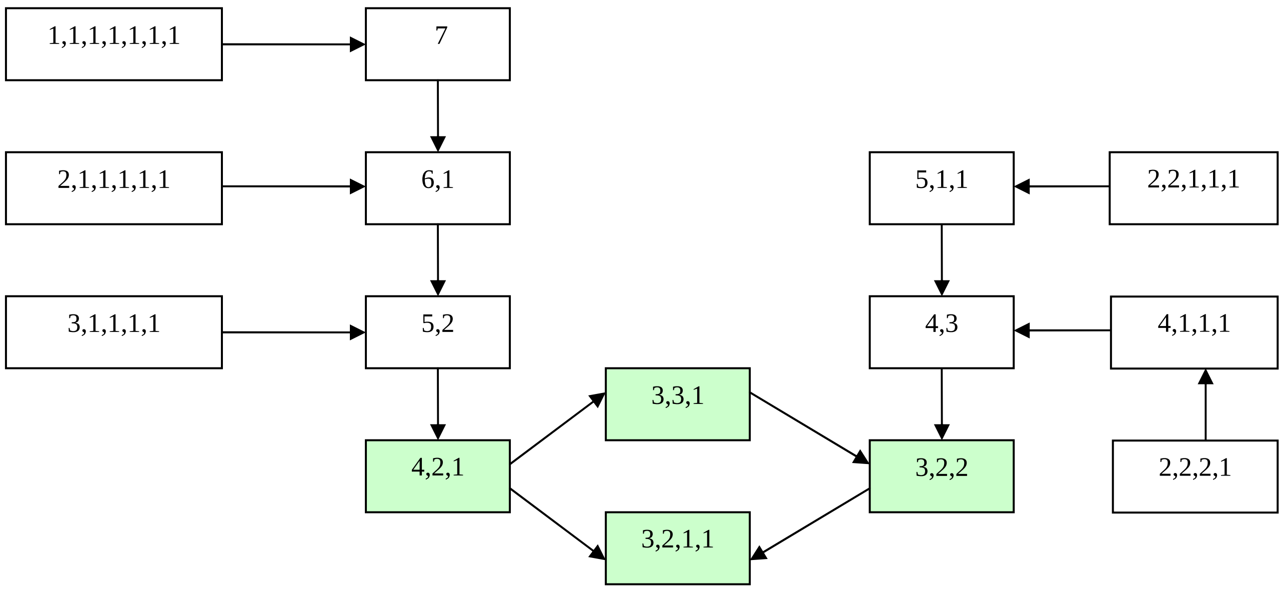
Olympiades académiques 2007 - Grenoble

Propositions de solutions

Exercice 1 : « Un problème de tas »

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



Question 1
En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).
Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.
Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition $\boxed{(4,2,1)}$.

Questions 2 et 3
On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale $\boxed{(3,3,1)}$ pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2 : « Des trapèzes de même aire »

1) De l'égalité $m^2 - p^2 = 8$, on déduit (*) : $m^2 = p^2 + 8$ donc : $p < m < p + 3$, et $m = p + 1$ ou $m = p + 2$.
Avec $m = p + 1$, (*) est impossible. Avec $m = p + 2$, il vient $p = 1$ et $m = 3$.

2) Une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
$DC = AB - AD$; $MN = AB - 2$
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB - 4)^2 - (AD - AB)^2 = 8$.

On obtient avec 1) : $AB = 7$, $AD = 6$, $DC = 1$.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3 : « Deux billes dans une urne »

On note C (c ;0) les coordonnées du centre de la bille.
CM^2 où M est un point de la parabole est égal à $x^4 + (1 - 2c)x^2 + c^2$.
Notons g la fonction définie par $g(x) = x^4 + (1 - 2c)x^2 + c^2$.
L'étude des variations de g (dans $\mathbb{R}^+$) donne :
Si $1 - 2c \geq 0$, alors g est croissante, son minimum est donc $g(0) = c^2$, atteint en 0.
Si $1 - 2c \geq 0$, alors g possède un minimum égal à $c - 0.25$, atteint en $\sqrt{\frac{2c-1}{2}}$.
Dans le cas de la bille de rayon 0,1, le minimum est atteint en 0. La bille touche donc le fond.
Dans le cas de la bille de rayon 1, le minimum est atteint en $\sqrt{\frac{2c-1}{2}}$. La bille ne touche pas le fond.
La position du centre de la bille quand elle est tangente à la parabole est telle que $c - 0.25 = 1$ soit $c = 1{,}25$. Elle ne touche donc pas l'autre bille.

Exercice 3 bis : « Les nombres palindromes »

On indique ci-dessous la "forme" d'un nombre ainsi que le nombre de possibilités pour chaque type.

• Nombres strictement inférieurs à 1 000

a	9
aa	9
aba	81

Il y a donc 99 nombres palindromes sans chiffre 0 qui sont strictement inférieurs à 1000

• Entre 1000 et 2000 il y a en plus

1aa1	9

Il y a donc 108 = 99 + 9 nombres strictement inférieurs à 2000

• Nombres strictement inférieurs à 1 000 000

a	9
aa	9
aba	81
abba	81
abcba	243
abccba	243

Il y a donc 2(9 + 81 + 234) = 648 nombres palindromes strictement inférieurs à 1 000 000

• Entre 1 000 000 et 1 234 567 il y en plus les types

11aba11	avec $1 \leq a$ et $b \leq 9$	81
12aba21	avec $1 \leq a \leq 2$ et $1 \leq b \leq 9$	18
123a321	avec $1 \leq a \leq 4$	4

Il y a donc 103 nombres palindromes entre 1 000 000 et 1 234 567.
ce qui fait au total 648 + 103 = 751 nombres inférieurs à 1234567

Exercice 4 : « Jeu de cubes »

(a,b) désigne un cube avec a faces rouges et $b = 6 - a$ faces noires:

• Question 1

(1,5) : 1 possibilité
(2,4) : 2 (les deux faces rouges sont soit adjacentes soit opposées)
(3,3) : 2 (soit il y a deux faces rouges opposées, soit il y a un sommet entouré uniquement de faces rouges)
(4,2) : 2 (par symétrie)

(5,1) : 1 (par symétrie)

Il y a donc 8 cubes strictement bicolores.

• Question 2

On considère 2 couleurs fixées (le rouge et le noir par exemple).

Si les deux faces de couleurs rouge et noir sont opposées, on fixe encore une troisième couleur ce qui immobilise le cube. Il reste $2 \times 3 = 6$ manières de peindre les 3 faces restantes.

Si les faces rouges et noires sont adjacentes, le cube est déjà immobilisé par ces deux couleurs et il reste $2 \times 3 \times 4 = 24$ possibilités pour compléter.

On obtient donc $30 = 6 + 24$ solutions.