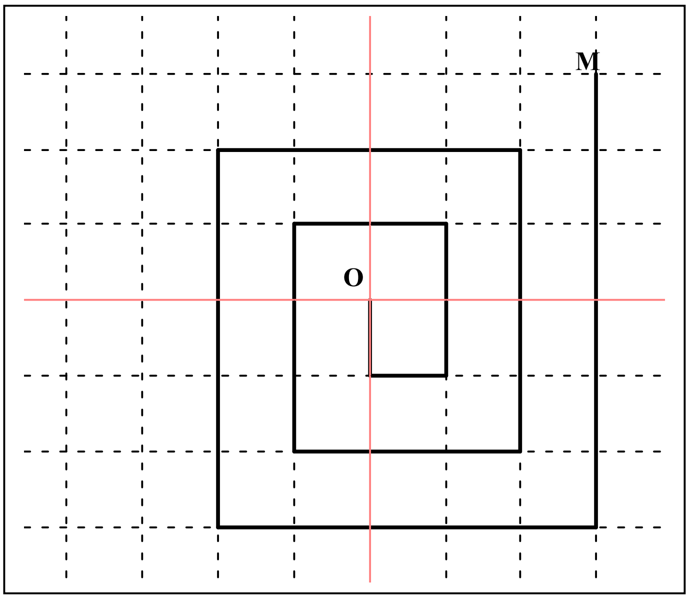
Olympiades académiques 2006 - Grenoble

Exercice 1 : la « spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note *l(*M*)* la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de *l*(A).

2) Soit B e point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer *l*(B).

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que *l*(C)=2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

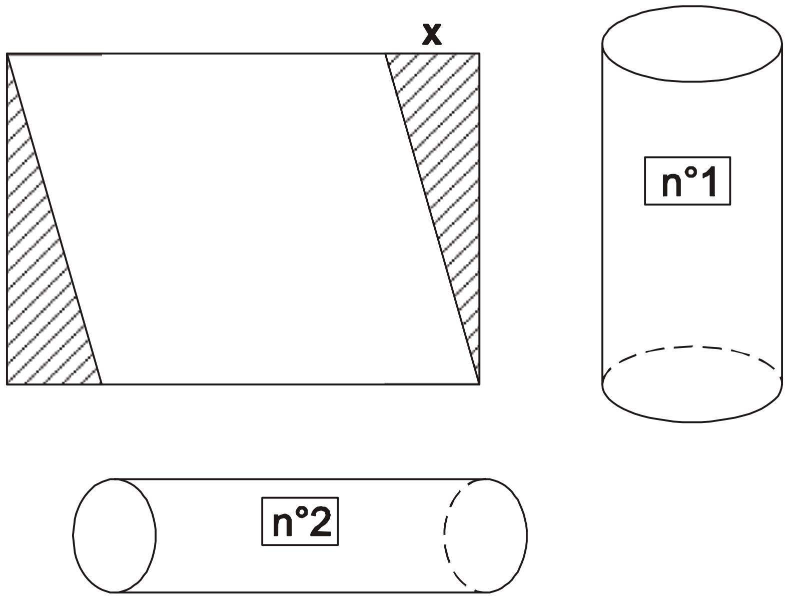
On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, 1+2+3+…+n = $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

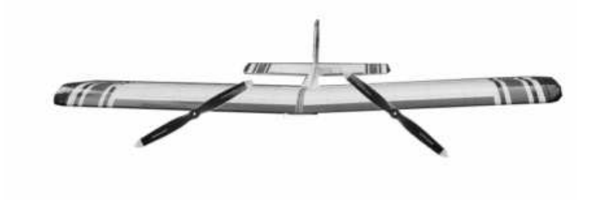
Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice 3

1. Déterminez le plus grand entier k tel que 3^k divise le produit $1\times2\times3\times\ldots\ldots\times28\times29$ de tous les entiers de 1 à 29.

2. Même question dans le cas du produit $1\times2\times3\times\ldots\ldots\times2005\times2006$ de tous les entiers de 1 à 2006.

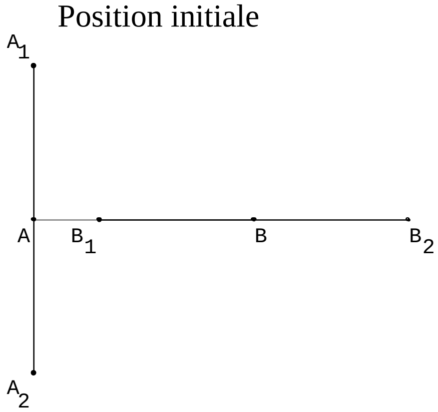
Exercice 4 : les deux hélices

<table>
<tr>
<td>
Sur ce modèle réduit, la distance entre les axes des deux hélices de même longueur et qui tournent dans un même plan est supérieure à la longueur d'une hélice.
Les hélices peuvent tourner de façon indépendante sans se heurter.</td>
<td>
Cette fois, la distance entre les axes des deux hélices est inférieure à la demi-longueur d'une hélice.
Les hélices vont nécessairement se heurter.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
Et si la distance entre les axes des deux hélices est comprise entre la demi-longueur et la longueur d'une hélice ?
Il s'agit, dans cet exercice, de savoir, dans un cas particulier, s'il est possible de faire tourner les deux hélices dans le même sens et à la même vitesse sans qu'elles se heurtent.</td>
</tr>
</table>

On modélise la situation de la façon suivante.
L'unité est le centimètre.
A et B sont deux points tels que $AB = 10$. Deux segments $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ de longueur 14 ont pour milieux respectifs A et B.
Leur position initiale est indiquée ci-dessous ($[B_1B_2]$ est inclus dans la droite (AB) et $[A_1A_2]$ est perpendiculaire à (AB)).
On les fait pivoter autour de leurs centres d'un même angle orienté (voir la figure ci-dessous à droite qui illustre un cas particulier).

1. Quel est l'ensemble des positions du point d'intersection H des droites (A_1A_2) et (B_1B_2) quand les segments pivotent ?
2. Les deux segments vont-ils se toucher ?

Position initiale



Position après rotation d'angle $\pi/6$