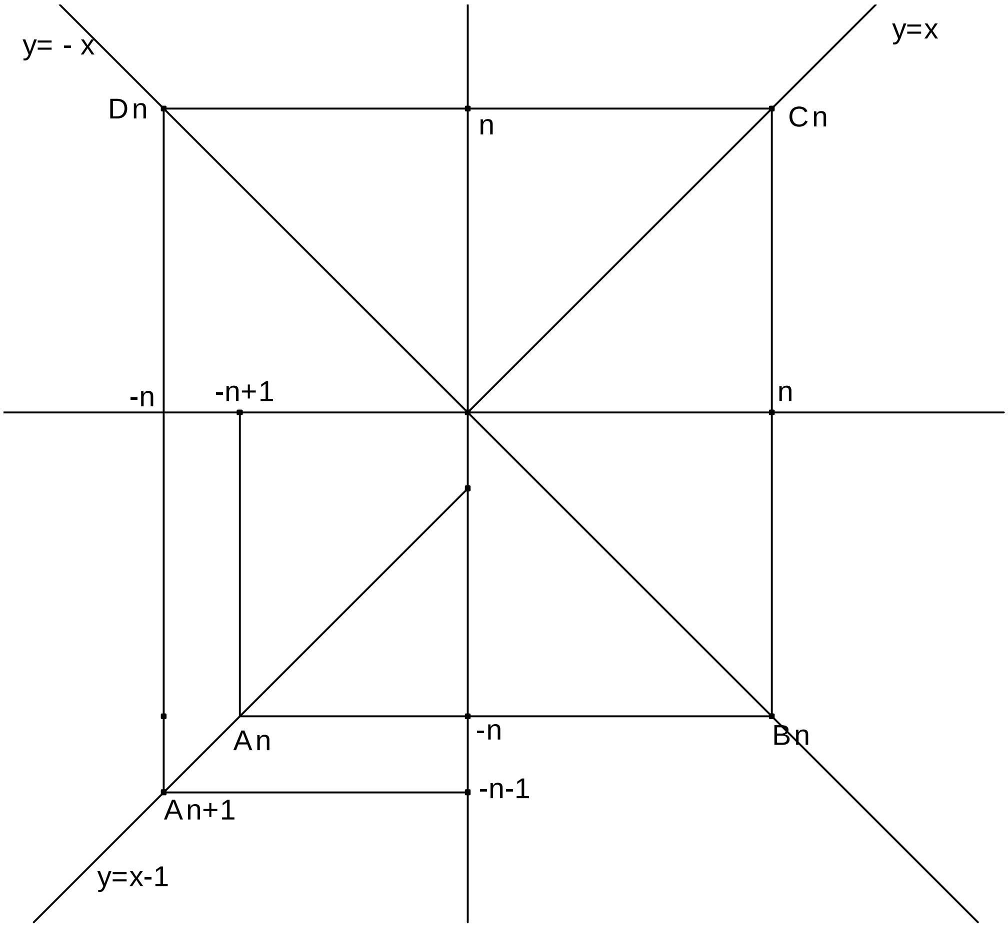
Olympiades académiques 2006 - Grenoble

Propositions de solutions

Exercice 1 : La « spirale »

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites D_1 , D_2 et D_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1 \ (D_1)$, $y = -x \ (D_2)$ et $y = x \ (D_3)$.

Notons A_n le point de D_1 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(-n+1, -n)$.
B_n le point de D_2 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(n, -n)$.
C_n le point de D_3 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : (n, n).
D_n le point de D_2 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbb{N}^*$ des segments

$$[D_{n-1}A_n], [A_nB_n], [B_nC_n] \text{ et } [C_nD_n]$$

de longueurs respectives $2n - 1$, $2n - 1$, $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0 .

On conjecture facilement que les points A_n et C_n ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n) = (2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n) = (2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$l(A_n) = OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_2 + \ldots + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + \ldots + (2n-2) + (2n-2) + (2n-1)$$
$$= 2.(1 + 2 + 3 + \ldots + (2n-2)) + (2n-1))$$
$$= 2.\frac{(2n-2)(2n-1)}{2} + (2n-1)) = (2n-2)(2n-1) + (2n-1)$$
$$= (2n-1)((2n-2)+1) = (2n-1)^2$$

et $l(C_n) = l(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$

1. Il existe deux points A de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.

   $\boxed{1^{\text{ier}} \text{ cas} : A(5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[B_5C_5]$;

   en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.

   Ainsi $l(A) = l(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$.

   $\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas} : A'(-5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[D_5A_6]$ $(D_5(-5,5), A_6(-5,-6)$;) avec $A'A_6 = 6$.

   Ainsi $l(A') = l(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}$.

2. $B(2005, 2006)$ est sur le segment $[C_{2006}D_{2006}]$;

   en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_5(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.

   Ainsi $l(B) = l(C_{2006}) + 1 = 4012^2 + 1 = \boxed{16\ 096\ 145}$.

3. On cherche ici le point C tel que $l(C) = 2006$.

   Or, la suite des nombres

   $$l(O) = 0,\ l(A_1) = 1,\ l(C_1) = 4,\ l(A_2) = 9, l(C_2) = 16, \ldots,$$
   $$\ldots\ l(A_n) = (2n-1)^2,\ l(C_n) = (2n)^2$$

   est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).
   Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

   $$l(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23}).$$

   De plus $C_{22}D_{22} = 44$ donc

   $$l(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23})$$

   donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.

   Enfin : $2006 - 1980 = 26$ donc $\begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ y_c = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$

   Donc C a pour coordonnées $\boxed{(-22,-4)}$.

4. Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.

   Eliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.

   Notons $n = \max(|p|,|q|)$.

$\boxed{\text{Si } n = |p|}$ alors $|q| \leq n$ donc $-n \leq q \leq n$ et $p \in \{-n, n\}$.

Si $p = n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[B_n C_n]$

car $\begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leq y_D \leq y_{C_n} = n \end{cases}$

Si $p = -n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[D_n A_{n+1}]$

car $\begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n - 1 < -n \leq y_D \leq y_{D_n} = n \end{cases}$

$\boxed{\text{Si } n \neq |p|}$ alors $|p| < |q| = \max(|p|, |q|) = n$:

par suite $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n, n\}$.

Si $q = n$ alors $D(p,n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_n D_n]$

car $\begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$

Si $q = -n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_n B_n]$

car $\begin{cases} x_{A_n} = -n + 1 \leq x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$

Ainsi <u>dans tous les cas D est sur un des segments qui constituent la spirale</u>.

<u>Exercice 2 : les cylindres en papier</u>

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est h, le rayon de base R et la surface de base B, la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.
Pour un cercle de rayon R, la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.
Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base a qu'on enroulera et de hauteur b qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

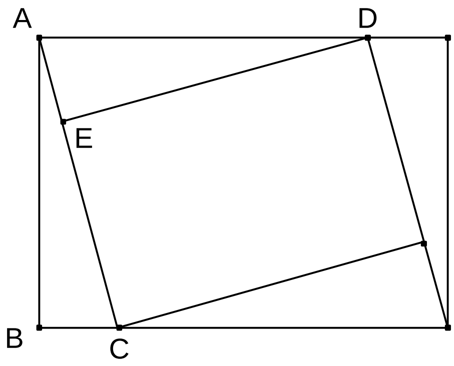
$$a = 2\pi R \quad \text{d'où} \quad R = \frac{a}{2\pi} \quad \text{puis} \quad V = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 b \quad \text{soit} \quad \boxed{V = \frac{1}{4\pi}a^2 b}.$$

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29,7$)
   Notons $a = 21 = l$ et $b = 29,7 = L$.
   Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :
   $$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}L^2 l} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi}l^2 L}$$
   Ainsi $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.
   Remarquons qu'<u>il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure</u>.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

   Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :
   $$a = 29.7 - x = L - x \quad \text{et} \quad b = 21 = l \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}(L - x)^2 l}.$$

Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de a et b.



Or (cf figure) :

$a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC. Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles ABC et DEA sont semblables.
Il vient : $\dfrac{DE}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$ soit $\dfrac{b}{L - x} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$ d'où $b = \dfrac{l(L - x)}{\sqrt{l^2 + x^2}}$

On a alors :

$V_1 = \dfrac{1}{4\pi}\left(\sqrt{l^2 + x^2}\right)^2 \dfrac{l(L - x)}{\sqrt{l^2 + x^2}}$ soit $\boxed{V_2 = \dfrac{1}{4\pi} l(L - x)\sqrt{l^2 + x^2}}$.

Par suite :

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi}(L - x)^2 l = \frac{1}{4\pi} l(L - x)\sqrt{l^2 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow (L - x) = \sqrt{l^2 + x^2} \quad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi}(L - x)l$$

$$\Leftrightarrow (L - x)^2 = l^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2 + x^2 - 2Lx = l^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2 - 2Lx = l^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{L^2 - l^2}{2L}}$$

Numériquement on obtient $L = 29,7$ et $l = 21$: $\boxed{x\ ;\ 7.426}$.

soit $x\ ;\ \dfrac{29.7}{4} = 7.425$.

Autrement dit <u>il suffit de choisir pour x à peu près le quart de la longueur de la feuille</u>.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\dfrac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions…

En fait, le format $21 \times 29,7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\dfrac{2l}{L} = \dfrac{L}{l}$ soit $L = l\sqrt{2}$.

mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

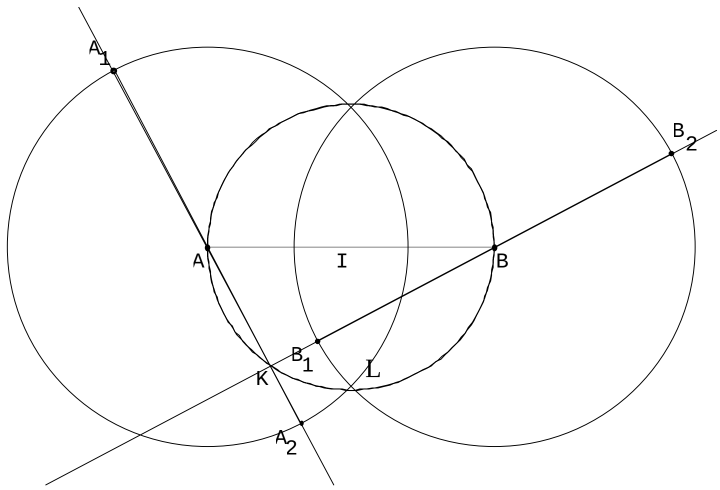
Si le format A4 était non 21×29.7 mais $21 \times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers…) , l'exercice donnerait pur résultat :

$$x = \frac{L^2 - l^2}{2L} = \frac{L^2 - \frac{L^2}{2}}{2L} = \frac{L^2}{4L} \text{ soit } \boxed{x = \frac{L}{4}} \qquad \text{sic….}$$

Exercice 3

Il suffit de calculer la somme des parties entières de $\frac{2006}{3^n}$ pour n variant de 1 à 6.
On obtient k=998 (k=13 dans la première question).

Exercice 4 : les deux hélices



On montre que les droites restent perpendiculaires, le lieu de H est donc est le cercle de diamètre $[AB]$).
Par ailleurs, B_1 et de A_2 décrivent des cercles de centre A et B.
Dire que les deux segments se touchent, c'est dire que H peut se trouver à une distance de A inférieure ou égale à 0,35 et à une distance de B inférieure ou égale à 0,35, ce qui revient à dire que H peut se trouver à l'intérieur des deux cercles de centres respectifs A et B et de rayon 0,35.
Il reste à justifier que les points d'intersection L et L' de ces deux cercles sont des points intérieurs au cercle de diamètre $[AB]$ pour conclure que ce n'est pas possible.

Les deux segments peuvent donc pivoter librement (la longueur « limite » est ici $10\sqrt{2}$).