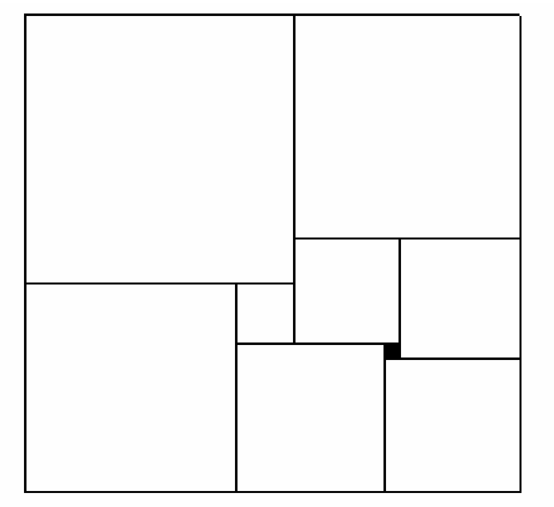
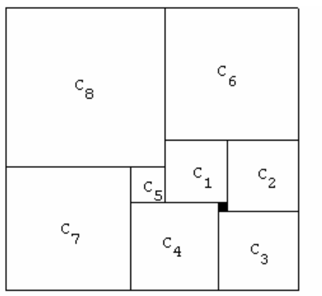
Exercice 1

<u>Un pavage</u>

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité.
Quelles sont les dimensions du rectangle ?



Une solution



Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit (carré C_1).
Si ce carré C_1 a pour côté **c**, le carré C_2 a pour côté **c + 1**, et le carré C_3 a pour côté **c + 2**.
Le carré C_4 a pour côté **c + 3**.
(A chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté **1**)
Ceci permet de déduire que le carré C_5 pour côté **4**. Quant au carré C_6 il a pour côté **2c + 1**.
On obtient qu'une des dimensions du rectangle initial est :

$$(2c + 1) + (c + 1) + (c + 2) = 4c + 4.$$

Le carré C_7 a pour côté **c + 3 + 4** = **c + 7**. Donc l'autre dimension du rectangle initial est :

$$(c + 7) + (c + 3) + (c + 2) = 3c + 12.$$

Le dernier carré C_8 a pour côté **c + 7 + 4 =c + 11**.

Finalement deux côtés opposés du rectangle ont pour dimensions :

$$4c + 4 \text{ et } (c + 7) + (c + 11) = 2c + 18$$

Les deux côtés étant de même longueur, on a **4c + 4** = **2c + 18** ce qui donne **c** = **7**.

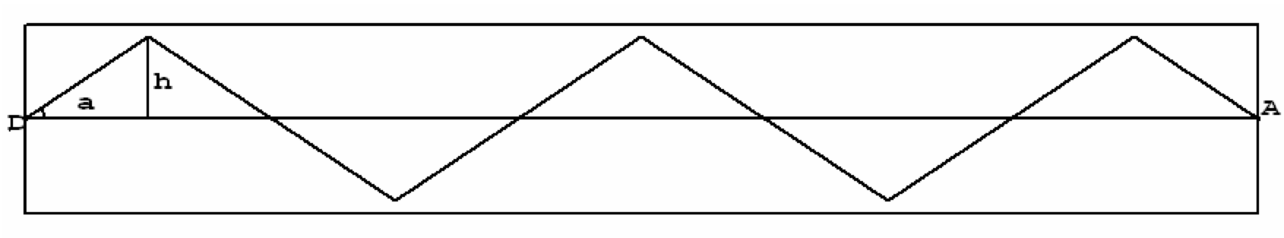
En conclusion, le rectangle initial a pour dimensions **32u et 33u**.

Exercice 2 **Le cycliste**

Un cycliste doit, pour arriver à sa maison, gravir un chemin rectiligne de 100 m de long et de 3,48 m de large faisant un angle constant avec l'horizontale.
Trouvant la pente trop difficile il décide en partant du point D au milieu du chemin de zigzaguer en conservant un angle constant *a*, non nul, avec l'axe du chemin et une amplitude constante pour arriver en A au milieu du chemin.
Sachant qu'il veut monter la côte en parcourant 200m,

1. quel angle *a* doit-il prendre au départ ?
2. Quelle amplitude maximale 2*h* peut-il adopter ?

La figure ci-dessous n'est évidemment pas à l'échelle :



Pistes de solution.

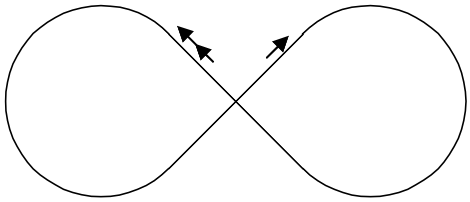
1. Pour faire le double de la distance il faut faire des triangles équilatéraux donc il faut prendre un angle de 60°.
2. Si on a n triangles équilatéraux la hauteur de chaque triangle est : $\frac{100}{n}\sqrt{3}$

Il faut donc que $\frac{100}{n}\sqrt{3} \leq 1{,}74$ donc $n \geq 200$. La plus grande amplitude possible est donc :

$2h = 2\sqrt{3}$.

Exercice 3 **Le lièvre et la tortue**

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).
Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour) hormis le départ, le lièvre abandonne.
Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

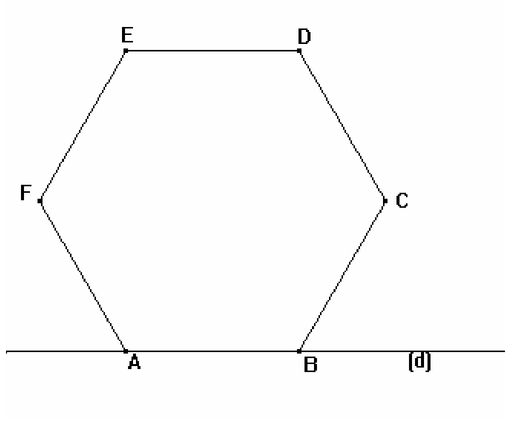
Éléments de correction

Le lièvre se déplace 363 fois plus vite que la tortue. Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 moitiés de circuit, c'est-à-dire 181 « tours complets » et un demi circuit, à l'issue duquel les deux animaux se croisent. Le lièvre a donc dépassé 181 fois la tortue (à chaque passage sur une boucle de rang pair de son parcours), et l'a croisée une fois au carrefour : ce premier demi circuit de la tortue génère donc 182 « dépassements ou croisements ».
Au second demi circuit effectué par la tortue, le même raisonnement s'applique (la position initiale étant comptabilisée dans le décompte précédent), et ainsi de suite. Ainsi, chaque demi circuit effectué par la tortue génère 182 rencontres, dont 181 dépassements et un seul croisement à la fin.
$2005=11\times182+3$
Donc pour 2005 « croisements ou dépassements », la tortue aura parcouru 11 moitiés de circuit, qui auront généré 11 croisements.

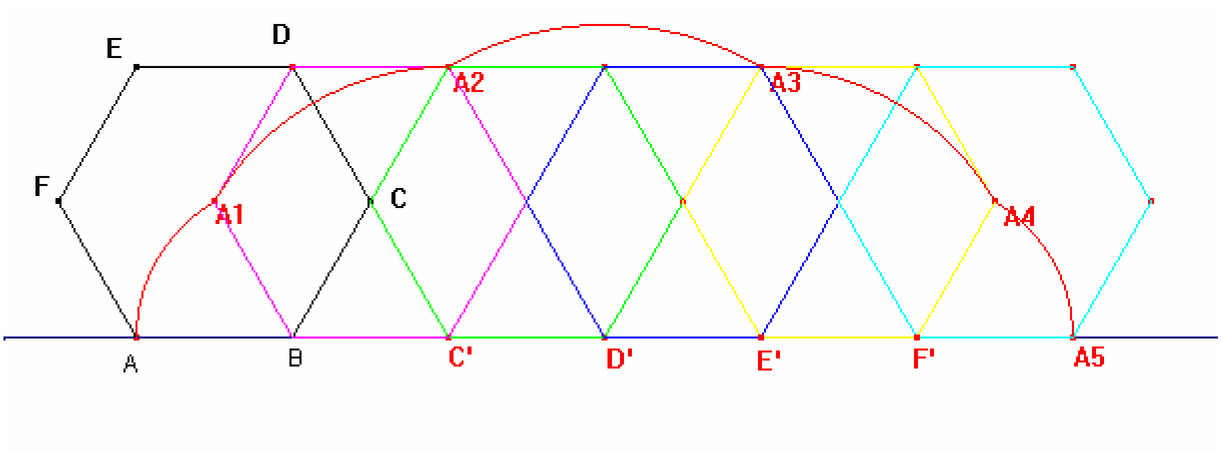
série L et E-S : exercice 4 **<u>la roue hexagonale</u>**

Soit ABCDEF un hexagone régulier de côté a, tel que A et B appartiennent à la droite (d).
On fait rouler cet hexagone sur la droite (d) toujours dans le même sens.

1. Tracer la trajectoire (T) du sommet A jusqu'au moment où A se trouve à nouveau sur (d).
   On pourra prendre 2 cm pour longueur du côté de l'hexagone.
2. Exprimer en fonction de a, la distance parcourue par le point A.

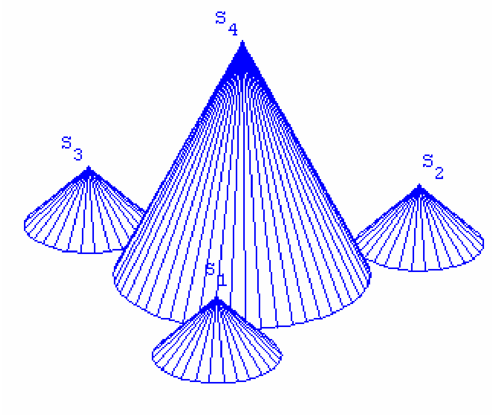


Corrigé rapide :



La trajectoire est obtenue par rotations d'angle $-\frac{\pi}{3}$ (ou $\frac{\pi}{3}$) et de centres respectifs les sommets de l'hexagone .
Le point A décrit cinq arcs de cercles qui sont des sixièmes de cercles.
$AB = AF = a$; $AC = AE = a\sqrt{3}$; $AD = 2a$;
Distance parcourue par le point A : $\frac{2\pi}{6}\left(a + a\sqrt{3} + 2a + a\sqrt{3} + a\right) = \frac{2a\pi}{3}\left(2 + \sqrt{3}\right)$
Remarque : si les rotations s'effectuent dans le sens direct, il y a six étapes, le point A étant fixe lors de la première rotation.

Série S et STI exercice 4 **Les cônes**



Quatre cônes sont posés sur le sol.

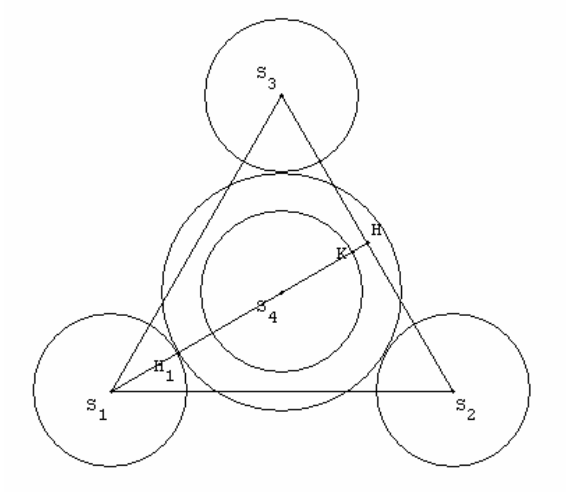
Les trois cônes de sommets S_1, S_2 et S_3 sont identiques, Leur hauteur est égale au rayon r de leurs cercles de base et les centres de ces cercles sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1.

La hauteur du cône de sommet S_4 est égale au diamètre de son cercle de base et celui-ci est tangent extérieurement aux cercles de base des trois autres cônes.

Les quatre cônes sont opaques.

Quelle condition doit vérifier r pour que, depuis le sommet de chacun des quatre cônes, les trois autres sommets soient visibles.

Proposition de solution



Le problème se ramène à la question suivante :
« à quelle condition sur r le point S_3 est-il visible depuis S_2 ? »

La construction n'est possible que si $r < 0,5$ (on suppose ici que le cône de sommet S_4 n'est pas réduit à un point).

On travaille dans la vue de dessus.

Le rayon R du cercle de base du cône de sommet S_4 est égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{3} - r$.

La ligne de niveau r sur le cône de sommet S_4 est le cercle C de centre S_4 et de rayon R - 0,5r.

Construisons le projeté orthogonal H de S_4 sur (S_2S_3) et l'intersection K de C avec la demi-droite $[S_4H)$.

Dire que le point S_3 est-il visible depuis S_2 , c'est dire que K est un point du segment $[S_4H]$.

Cette condition s'écrit $(\dfrac{\sqrt{3}}{3} - r) - \dfrac{1}{2}r < \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, soit $r > \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

La condition cherchée est donc $\dfrac{\sqrt{3}}{9} < r < \dfrac{1}{2}$.