OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION DE 2004

CLASSE DE PREMIÈRE **DURÉE : 4 heures**

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1

On s'intéresse à l'angle de tir $\widehat{P_1JP_2}$ d'un joueur J sur un terrain de football. On précise que pour la plupart des matches internationaux le terrain est un rectangle de longueur et largeur respectives 105 m et 68 m et les poteaux des cages P_1 et P_2 distants de 7,32 m ; valeurs que l'on adoptera pour cet exercice.

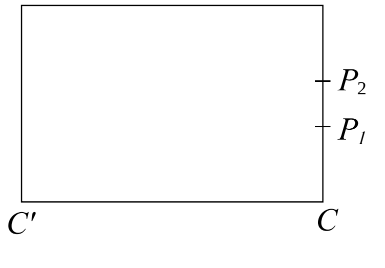
1 - Quel est l'angle de tir arrondi au dixième de degré pour :
- un gardien de buts placé au milieu de sa cage et tirant dans les cages opposées à celles qu'il défend ?
- un joueur situé au point de pénalty (situé à 11 m du milieu des cages, et équidistant des deux poteaux) ?

2 - Représenter sur une feuille à l'échelle 1/500 le terrain de football, les cages ainsi que des lignes de niveau où l'angle de tir est constant ; on donnera les valeurs approchées des angles correspondants au dixième de degré. On représentera, en particulier, l'ensemble des points du terrain :
- où l'angle de tir est droit,
- où il est identique à ceux de la question 1.

Déterminer la zone du terrain où l'angle de tir est supérieur à l'angle droit.

3 - Excepté sur la ligne de sortie (P_1P_2), peut-on placer un joueur pour lequel l'angle de tir serait inférieur à celui obtenu au point le plus éloigné du gardien ?
Si tel est le cas, le placer sur la figure réalisée à la question 2.

4 - Le joueur J se déplace sur la ligne de touche (CC') (CC' désigne une longueur du terrain, C étant un point de corner situé sur (P_1P_2) ; voir la figure ci-contre).
On appelle x la longueur CJ $\left(0 \leq x \leq 105\right)$.



a) Exprimer $\cos \widehat{P_1JP_2}$ en fonction de x, $d_1 = CP_1$ et $d_2 = CP_2$.
(Les calculs seront plus simples au **b)** en gardant d_1 et d_2 plutôt que les valeurs numériques.)

b) En déduire la valeur de x pour laquelle l'angle de tir est maximal.

Il n'est pas rare de marquer un but de cette position, Ronaldinho en a marqué un, dans une position proche, lors de la dernière coupe du monde.

EXERCICE 2

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}.$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits "échangeables" s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1 - Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

2 - Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

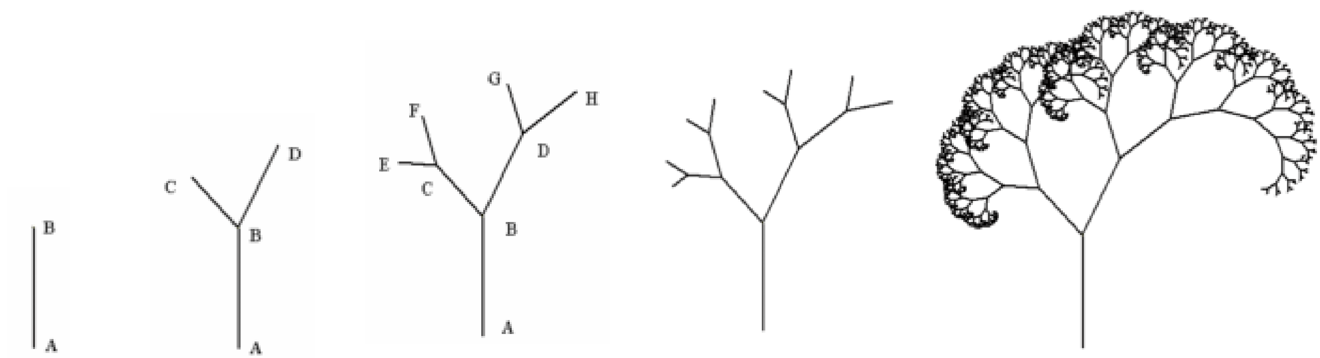
3 - À quelle condition deux **entiers** u et v sont-ils échangeables ?

EXERCICE 3

L'unité de longueur est le mètre.
On modélise la croissance d'un arbuste de la façon suivante, illustrée par les dessins ci-dessous.

- L'état initial est représenté par un segment $[AB]$ vertical de longueur 1, le sol est horizontal en A.
- Un an après, deux "branches" ont poussé, représentées par les segments $[BC]$ et $[BD]$.
- L'année suivante, au bout de chacune des "branches" $[BC]$ et $[BD]$, ont poussé deux "branches" représentées par les segments tels que les triangles BCE, BDG et ABC sont semblables, et que les triangles BCF, BDH et ABD sont semblables.
- Le même processus se répète ensuite chaque année.

Exemple de croissance :



Etat initial — 1 an — 2 ans — 3 ans — 10 ans

Dans la suite, on suppose que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right) = 5\dfrac{\pi}{6}$, que $CB = 0{,}7$ et que $BD = 0{,}75$.

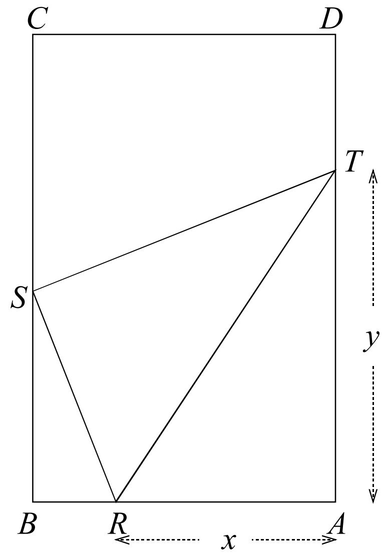
1 - Faire une figure à l'échelle, en prenant 5 cm pour $[AB]$, représentant l'arbre au bout de 3 ans.

2 - Avec les notations de l'exemple, donner les hauteurs des points $EFGH$ (extrémités au bout de 2 ans).

3 - Si on ne tient pas compte de la durée de vie de l'arbuste, sa taille (hauteur) peut-elle dépasser 3,5 ?

EXERCICE 4

Soit *ABCD* une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit *R* un point [*AB*] (bord inférieur de la feuille) et *T* un point de [*AD*] (bord droit de la feuille).
On replie la feuille suivant le segment [*RT*] et on appelle *S* la nouvelle position du point *A* (coin inférieur droit de la feuille).
Voir figure ci-contre.



Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où *S* est sur le segment [*BC*] (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$, $AT = y$.

1 - Trouver les valeurs minimales et maximales de x.

2 - Trouver une relation entre x et y lorsque *S* se déplace sur [*BC*].

3 - Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle *SRT*) est minimale.
Quelle est alors la nature du triangle *AST* ?