CORRIGE DES OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
Corrigé fourni par l'académie de Rennes
Session 2004

EXERCICE 1

Cet exercice ne demandait pratiquement aucune connaissance mathématique précise mais il fallait savoir s'organiser. C'est un des deux exercices proposées par l'Académie de Rennes à partir d'un exercice un peu semblable en ce qui concerne la première question publié par l'excellent journal Tangente.

Euler est mort à l'âge de 76 ans le jeudi 18 septembre 1783

1- Le texte nous dit qu'il a vécu plus de 50 ans et moins de 100 ans, compte tenu de ses dates naissance et de décès il est donc mort entre 1757 et 1806. Les années bissextiles entre ces deux années et la somme de leurs chiffres sont donc :

Année	1760	1764	1768	1772	1776	1780	1784	1788	1792	1796	1804
Somme	14	18	22	17	21	16	20	24	19	23	13

La seule année qui convienne est donc 1784 et il est donc mort en 1783 à 76 ans

<u>Remarque</u> : les données étaient redondantes et on n'avait guère besoin de savoir comment se comportait l'âge par rapport à 3, 5 ou 7. Dans ce genre d'épreuve type olympiades les élèves sont également jugés sur cette capacité à trier les informations essentielles.

2- Pour trouver le jour du décès on choisit un point de départ – *certains ont choisi leur date anniversaire, d'autres une date particulière ou tout simplement la date du jour* - . On a pris le parti de prendre pour remonter dans le temps la date du **24 mars 2004 qui était un mercredi.**
Le raisonnement prend appui sur le principe suivant : **lorsque l'on rajoute à un jour de la semaine une semaine (ou 7 jours) on retombe sur le même jour de la semaine.**

Il suffit alors de compter le nombre de jours depuis le 18 septembre 1783 jusqu'au 24 mars 2004 en tenant compte des années bissextiles :

Du 18/09/1783 au 31/12/1783 : **104 jours**
Du 1/1/1784 au 31/12/2003 il y a parmi 220 années 53 années bissextiles
4 années bissextiles de 1783 à 1800
24 années bissextiles de 1801 à 1900
25 années bissextiles de 1901 à 2003
ce qui donne donc 220 x 365 + 53 = **80353 jours**
Du 1/1/2004 au 24/03/2004 : **84 jours**

D'ou un total de **80541 jours soit 11505 semaines et 6 jours**

Par conséquent Euler est mort un jeudi.

EXERCICE 2

Cet exercice donnait l'opportunité de visualiser le problème en direct en découpant une feuille aux dimensions indiquées ou de dimensions proportionnelles. Il y a naturellement plusieurs façons de résoudre cet exercice , nous vous donnons celle proposée par le concepteur du sujet

La feuille format 4×6 constitue un rectangle ABCD. On plie cette feuille de sorte que le point A coïncide avec un point S du côté]BC[. La feuille est pliée suivant le segment [RT] avec $T \in [AD]$ et $R \in [AB]$ et on pose x = AR et y = AT.

1- **Encadrement de x** : *remarque (RT) est un axe de symétrie du quadrilatère ARST*. Les positions extrêmes sont atteintes : x est maximal quand R est en B (x = 4) et x est minimal quand T est en D (y = 6). **La valeur maximale de x est x = 4 .**

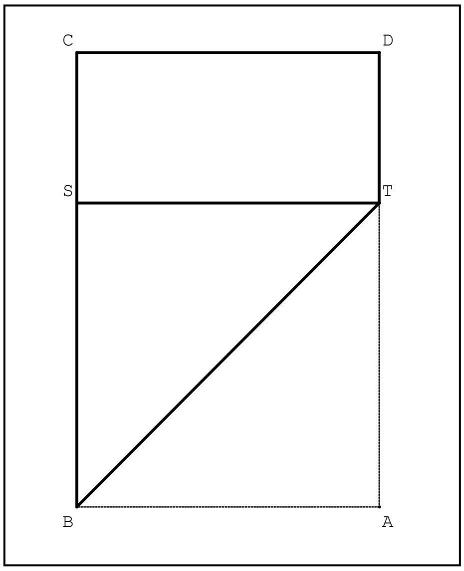


Figure 1

Du fait de la symétrie (Figure 2) par rapport à (TR) on a DS = 6 et du triangle rectangle SCD on tire que SC² = 20. Comme CB = CS + SB = 6 on obtient que SB = 6 - $\sqrt{20}$. On a RB = 4 – x et du triangle rectangle SBR on tire que SR² = RB² + SB². Du fait de la symétrie par rapport à (TR) on a SR = RA = x d'où

$$x^2 = (4 - x)^2 + (6 - \sqrt{20})^2$$

ce qui donne après simplification **pour valeur minimale de x**

$$\mathbf{x = 9 - 3\sqrt{5}}\ .$$

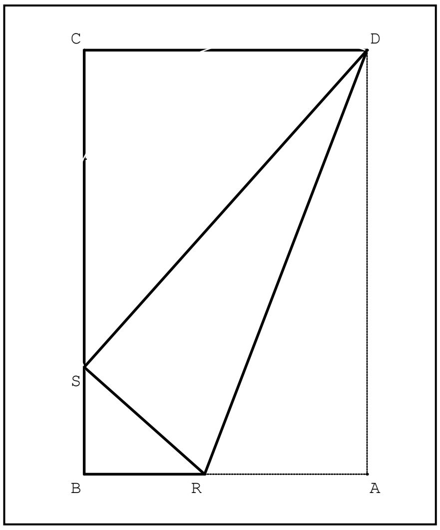
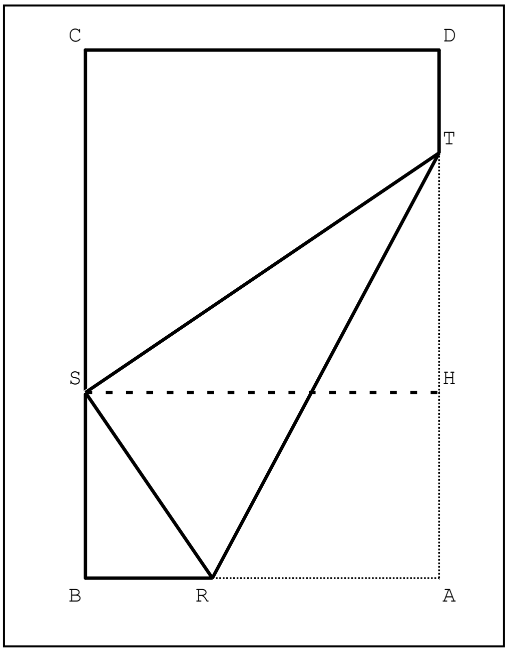


Figure 2

2- Relation entre *x* et *y* lorsque S se déplace sur [BC] :

Figure 3



On désigne par H (Figure 3) le projeté orthogonal de S sur [AD]. On sait que :

SR = AR
BR = 4 - x

D’où $\quad$ SB = $2\sqrt{2x-4}$

et comme AH = BS alors

$$HT = AT - AH = y - SB = y - 2\sqrt{2x-4}.$$

On sait aussi que TS =TA = y et SH = BA = 4 et donc dans le triangle SHT rectangle en H on a :

$$y^2 = 4^2 + (y - 2\sqrt{2x-4})^2$$

ce qui donne après développement, réduction et simplification

$$y = \frac{2x}{\sqrt{2x-4}}.$$

2- Valeur de *x* pour laquelle l’aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale et nature du triangle AST

On désigne par S(x) l’aire de la partie repliée qui correspond au triangle rectangle RAT et on a $S(x) = \frac{1}{2}\,AR \times AT = \frac{1}{2}xy$. D’où en utilisant la valeur de y ci-dessus on obtient

$$S(x) = \frac{1}{2}x\frac{2x}{\sqrt{2x-4}} = \frac{x^2}{\sqrt{2x-4}}.$$

La dérivée de S(x) est

$$S'(x) = \frac{x(3x-8)}{(2x-4)\sqrt{2x-4}}$$

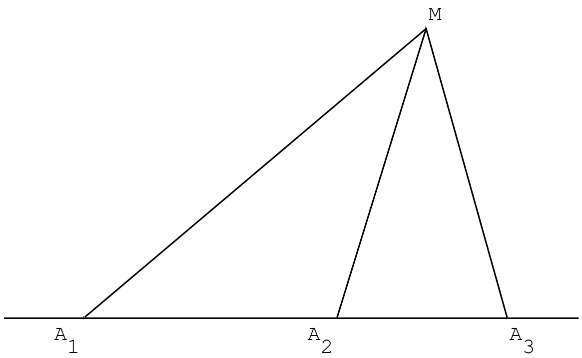
qui a sur l’intervalle de définition de x le même signe que $3x - 8$.
Ceci permet en utilisant le tableau de variation de S de voir que S admet un minimum en $\frac{8}{3}$ et de conclure que l’aire minimale vaut $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ unités d’aire.
Le triangle AST est évidemment équilatéral.

EXERCICE 3

L'objectif de cet exercice, difficile, n'est pas d'obtenir une réponse mathématique rigoureuse mais de tester les capacités d'initiative face à un problème inhabituel et dont les réponses sont loin d'être évidentes.

1- Lieu de rendez-vous lorsque les n points sont alignés

a- Réalisons une première approche en considérant 3 points alignés A_1, A_2, A_3 et un point M du plan



On considère la somme

$$S_3(M) = MA_1 + MA_2 + MA_3$$

et on cherche le ou les points P qui en réalise le minimum.
Or pour tout point M on a par l' inégalité triangulaire,

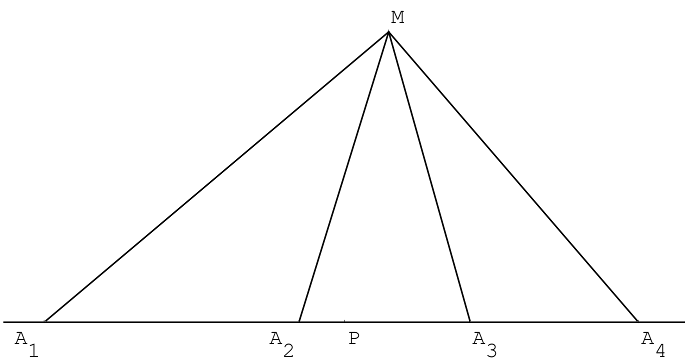
$$MA_1 + MA_3 \geq A_1A_3$$

il n' y a égalité que si M appartient au segment $[A_1A_3]$, et donc

$$S_3(M) \geq A_1A_3 + MA_2 .$$

On a par ailleurs $S_3(A_2) = A_1A_3$ et donc pour tout M, $S_3(M) \geq S_3(A_2)$. La somme est minimale en A_2 et alors égale à A_1A_3.

b- Considérons maintenant 4 points alignés A_1, A_2, A_3, A_4 et un point M du plan.



En appliquant deux fois l'inégalité triangulaire à

$$S_4(M) = MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_4$$

on obtient $S_4(M) \geq A_1A_4 + A_2A_3$.

Pour tout point P compris entre A_2 et A_3,

$$S_4(P) = PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 = A_1A_4 + A_2A_3$$

donc $S_4(M)$ est minimale pour tout point P du segment $[A_2A_3]$.

c- Il y a donc deux situations à considérer suivant la parité du nombre de points.

- **Cas de 2p + 1 points** notés $A_1, A_2, \dots, A_p, A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_{2p}, A_{2p+1}$ et rangés dans cet ordre sans perdre de la généralité de la démonstration . En particularisant le point A_{p+1} et en regroupant les longueurs MA_i et $MA_{2(p+1)-i}$ on obtient

$$S_{2p+1}(M) \geq A_1A_{2p+1} + A_2A_{2p} + \dots + A_pA_{p+2}$$

or $$S_{2p+1}(A_{p+1}) = (A_1A_{2p+1}) + (A_2A_{2p}) + \dots + (A_pA_{p+2})$$

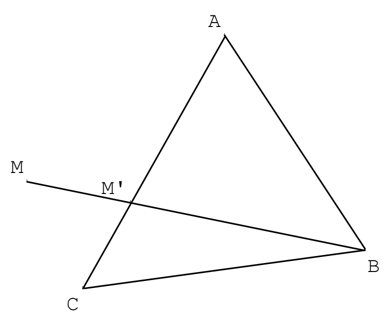
Ainsi le point A_{p+1} réalise le minimum.

- **Cas de 2p points** notés $A_1, A_2, \dots, A_p, A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_{2p}$. En raisonnant de la même façon que précédemment on voit que pour tout point P compris entre A_p et A_{p+1}, on a $S_{2p}(P) = (A_1A_{2p}) + (A_2A_{2p}) + \dots + (A_pA_{p+2})$ ce qui correspond au minimum.

En conclusion :

- **si le nombre de points est impair, le lieu de rendez-vous doit être le point central A_{p+1},**
- **si le nombre de points est pair, le lieu de rendez-vous peut être n'importe quel point situé sur le segment $[A_p, A_{p+1}]$.**

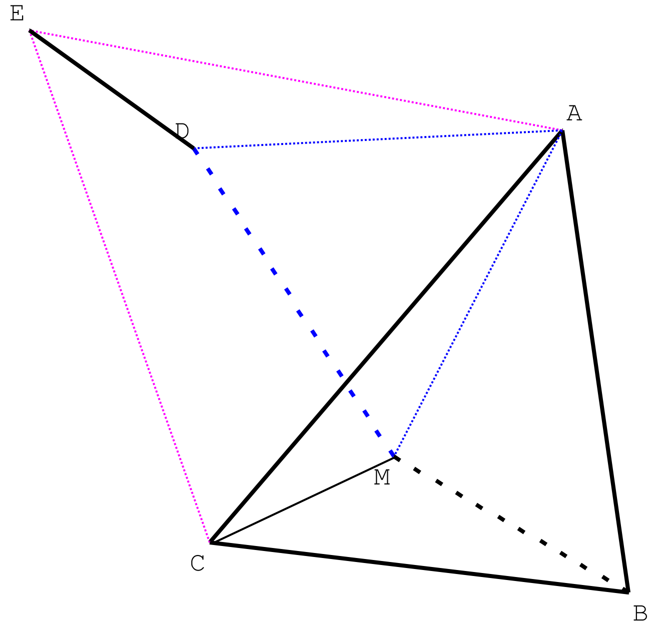
2- Cas de trois points non alignés : A, B et C forment alors un triangle



Pour tout point M extérieur au triangle, par exemple tel que M et B soient de part et d'autre de la droite (AC), on a par alors, en désignant par M' l'intersection de (AC) et [MB],

$$MA + MC \geq AC \text{ et } AC = M'C + M'A \text{ et donc } S_3(M) \geq S_3(M') .$$

Le ou les points recherchés sont donc à l'intérieur du triangle ABC.



L'idée retenue est de transformer la somme S_3(M) en une somme de longueurs de segments « consécutifs ».

On prend un point M à l'intérieur du triangle ABC. On construit le point D tel que MAD soit un triangle équilatéral tel que [MD] et [AC] soient sécants. On construit ensuite le point E dans le demi plan de frontière (AC) ne contenant pas B de sorte que CAE soit un triangle équilatéral.

Les triangles MAC et DAE sont isométriques :

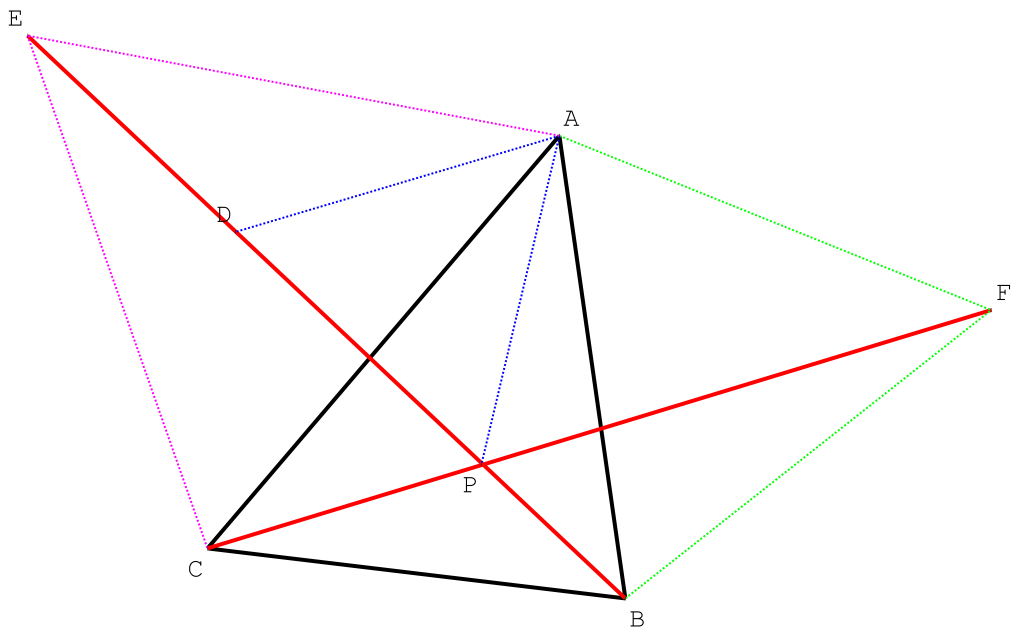
par construction on a - pour les longueurs AC = AE ainsi que AM = AD.

- pour les angles $\widehat{MAD} = \widehat{CAE} = 60°$

et donc $\widehat{MAC} + \widehat{CAD} = \widehat{CAD} + \widehat{DAE}$ d'où $\widehat{MAC} = \widehat{DAE}$

On en déduit que MC = ED.

On peut alors remplacer la somme S_3(M) par la somme S'_3(M) = ED + DM + MB. Or S'_3(M) est minimale si les points E, D, M et B sont alignés dans cet ordre. Existe-t-il des points M tels que cette condition soit réalisée ? Si un tel point existe alors il se trouve sur la droite EB. Un raisonnement identique montre qu'un tel point M doit également être sur la droite FC où F est l'image de B dans la rotation directe de centre A et d'angle 60°
C'est donc le point d'intersection de ces deux droites. Il reste à voir à quelle condition portant sur les angles cette intersection existe : l'angle A doit être inférieur à 120° et l'un des deux autres supérieur à 30°. Quitte à changer le choix des angles de travail on peut considérer être dans cette situation.



3- **Cas de quatre points non alignés**.

On a en utilisant l'inégalité triangulaire $S_4(M) \geq AC + BD$

Lorsque le quadrilatère ABCD est convexe AC et BD se coupant en un point P on a comme plus haut AC + BD = PA + PB + PC + PD et le point P réalise le minimum attendu.

Lorsque le quadrilatère ABCD n'est pas convexe avec par exemple le sommet D à l'intérieur du triangle ABC le minimum doit être inférieur à $S_4(D) = AD + BD + CD$. Le point D est le point cherché.

EXERCICE 4

Deux réels distincts u et v sont interchangeables s'il existe au moins un couple (a ; b) de réels tels que f(u) = v et f(v) = u où f est la fonction définie pour $x \geq -b$ par $f(x) = a - \sqrt{x+b}$

1- Pour montrer que 2 et 3 sont échangeables il faut chercher deux réels a et b tels que :

$$f(2) = a - \sqrt{2+b} = 3 \text{ et } f(3) = a - \sqrt{3+b} = 2$$

d'où la condition nécessaire :

$$a = 3 + \sqrt{2+b} = 2 + \sqrt{3+b}$$

d'où $1 = \sqrt{3+b} - \sqrt{2+b}$.

On doit chercher deux nombres dont la différence des racines carrées est égale à 1.

En prenant pour ces deux nombres 0 et 1, il vient b = -2 qui est solution de 2 + b = 0 et de 3 + b = 1. On en déduit a = 3 et $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.

2- En est-il de même de 4 et 7 ? Si la réponse est oui il est nécessaire de trouver a et b tels que :

$$a - 7 = \sqrt{4+b} \text{ et } a - 4 = \sqrt{7+b}.$$

On obtient alors :

$$(a-4)^2 - (a-7)^2 = 3$$

ce qui implique $3(2a - 11) = 3$ et $a = 6$. Mais dans ce cas $\sqrt{7+b} = a - 7 = -1$ ce qui n'est pas possible. La réponse est donc négative.

Condition pour que deux entiers n et m soient échangeables.

On considère deux entiers distincts m et n avec par exemple n < m.
Par équivalence il vient successivement :

$$(1)\ \begin{cases} a - n = \sqrt{m+b} \\ a - m = \sqrt{n+b} \end{cases}$$

$$(2)\ (i)\begin{cases} (a-n)^2 = m+b \\ (a-m)^2 = n+b \end{cases} \textbf{ et } (ii)\begin{cases} a-n \ge 0 \\ a-m \ge 0 \end{cases} \text{ ou compte tenu de l'hypothèse } a \ge m.$$

Ensuite toujours par équivalence l'accolade (i) est remplacée par

$$(i')\begin{cases} (a-n)^2 = m+b \\ (a-m)^2 - (a-n)^2 = n+b-(b+m) \end{cases} \text{ ou encore par } \begin{cases} (a-n)^2 = m+b \\ (n-m)(2a-n-m) = n-m \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $a = \dfrac{m+n+1}{2}$.

<u>En résumé</u> **f échange n et m si et seulement si** (compte tenu de (ii))

$$\boxed{\mathbf{a = \dfrac{m+n+1}{2} \text{ et } b = (a-n)^2 - m \text{ et } n + 1 \ge m}}$$

Or on a supposé que n < m, c'est donc que m = n + 1.

Deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs, de plus le calcul a montré que la fonction f est unique : $f(x) = n + 1 - \sqrt{x - n}$.