ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades inter-académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 28 mars 2023

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédiger sur leurs copies*** les solutions qu'ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

Avec le partenariat de

Exercice 1
L'esprit de la lettre

Lorsque l'on modifie l'ordre des lettres dans un mot, on arrive quand même à déchiffrer le mot du moment que la première et la dernière lettre du mot restent à la bonne place.

Par exemple, on arrive à déchiffrer la phrase :
Sleon une édtue de l'Uvinertisé de Cmabrigde, l'odrre des ltteers dans un mot n'a pas d'ipmrotncae, la suele coshe ipmrotnate est que la pmeirère et la drenèire soeint à la bnnoe pclae.

Dans cet exercice, on s'intéresse à un mot. On peut changer de place les lettres du mot, mais **la première lettre et la dernière lettre restent à la bonne place.**
Par exemple, on s'intéresse au mot LIRE. On obtient alors deux écritures possibles : LIRE et LRIE.

1.
a. On s'intéresse au mot ETUDE. Qu'obtient-on comme écritures possibles ?
b. On s'intéresse au mot HUMAIN. Combien d'écritures possibles obtient-on ?
c. Combien existe-t-il d'écritures possibles de la phrase suivante, composée de trois mots : LES CHATONS JOUENT ?

1. a. Pour le mot ETUDE, en conservant le E initial et le E final, il y a autant de mots possibles que des permutations des lettres T, U et D, soit 6 : TUD, TDU, DUT, DTU, UDT et UTD.
b. Pour le mot HUMAIN, on conserve le H et le N et on compte les permutations des quatre lettres U, M, A et I. Il y en a 24 (de gauche à droite dans l'écriture, on a 4 possibilités pour la première lettre, 3 pour la deuxième, 2 pour la troisième et $4 \times 3 \times 2 = 24$.
c. Le mot de trois lettres n'offre qu'une possibilité et pour les deux autres, on doit compter les permutations des lettres centrales, 5 lettres pour l'un, quatre pour l'autre. Au total, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 2\,880$ phrases possibles en conservant l'ordre des mots.

2. On s'intéresse ici à un mot qui s'écrit avec n lettres (n étant un nombre entier positif) et ne contenant pas de lettres qui se répètent. Exprimer, en fonction de n, le nombre d'écritures possibles de ce mot.

2. Si n est inférieur ou égal à 3, il n'y a qu'une écriture possible. Si $n \geq 3$, on compte les permutations des $(n-2)$ lettres centrales. Il y en a $(n-2)(n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1$. Ce nombre est appelé la factorielle de $(n-2)$, est noté $(n-2)!$, ce qu'on lit « factorielle $(n-2)$ ».

3. On s'intéresse ici à un mot qui s'écrit avec n lettres (n étant un nombre entier positif) contenant deux fois la même lettre entre la deuxième et l'avant-dernière lettre**, une seule lettre étant doublée**. Exprimer, en fonction de n, le nombre d'écritures possibles de ce mot.

3. Chacune des permutations des $(n-2)$ lettres apparaît deux fois, deux lettres identiques étant interchangeables. Le nombre cherché est donc $(n-2)(n-3) \ldots 4 \times 3$.

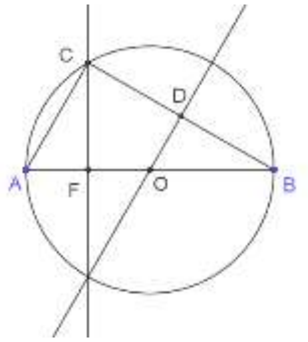
Exercice 2
Lecture inversée

Pour tout nombre entier naturel N de quatre chiffres (le chiffre des milliers est donc non nul), on considère le nombre entier naturel N' obtenu en inversant l'ordre des chiffres de N.
Par exemple, si $N = 3879$, alors $N' = 9783$.

1. Le nombre N' peut-il s'écrire avec moins de quatre chiffres ?
2. Existe-t-il un nombre N tel que $N' = 5N$?
3. Déterminer un entier naturel N tel que $N' = 4N$.

1. Le nombre N' ne s'écrit qu'avec 3 chiffres si son chiffre des milliers (le chiffre des unités de N, donc) est 0.
2. L'égalité $N' = 5N$ n'est envisageable que si $N < 2\,000$, ce qui exige que le chiffre le plus à gauche de N soit 1. Mais alors, le chiffre des unités de N' est aussi 1, ce qui ne se peut pas pour un multiple de 5. Il n'y a donc pas de solution à cette équation.
3. L'égalité $N' = 4N$ n'est envisageable que si $N < 2\,500$, ce qui exige que le chiffre le plus à gauche de N soit 1 ou 2. Mais N' étant un multiple de 4, son chiffre des unités ne peut pas être 1. Ce multiple de 4 a donc comme chiffre des unités 2, ce qui limite à 3 ou 8 les possibilités pour le chiffre des unités de N. Mais, comme $N \geq 2\,000$, N'est nécessairement supérieur à 8 000 et le chiffre des unités de N ne peut être 3. Si on écrit $N = 2\,000 + 100b + 10c + 8$, b et c étant des chiffres, on obtient $N' = 8\,000 + 400b + 40c + 32 = 8\,000 + 100c + 10b + 2$, ou encore $390b = 60c - 30$. De $13b = 2c - 1$, on déduit $b = 1$ et $c = 7$. Le nombre cherché est 2 178.

Exercice 3
Quel est le rayon du cercle ?



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] et de centre O.
On considère un point C du cercle $\mathcal{C}$. On note F le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
La médiatrice du segment [BC] coupe ce segment au point D.
On suppose que $\mathrm{OF} = \mathrm{OD} = 7$.

1. Déterminer deux triangles isométriques au triangle CFO.
2. Quel est le rayon du cercle $\mathcal{C}$?

1. Par définition des points D et F, les triangles CFO et CDO sont rectangles respectivement en F et D. Ils ont un côté commun, le segment [CO] et OD = OF. On en déduit qu'ils sont isométriques.
2. La droite (DO) est la médiatrice du segment [BC] donc les triangles OCB et OBD sont rectangles en D, ont le côté [OD] en commun et DC = DB. On en déduit qu'ils sont isométriques. Donc le triangle ODB est isométrique au triangle OFC. Les angles $\widehat{OBD}, \widehat{OCF}, \widehat{OCD}$ ont même mesure, et leur somme est supplémentaire de l'angle droit $\widehat{BFC}$ (le triangle BFC est rectangle en F). Leur mesure est donc 30°. Le triangle OFC est rectangle et ses angles aigus mesurent 30° et 60°. C'est ce qu'on appelle « un demi triangle « équilatéral », OF est donc la moitié de OC. Le rayon du cercle est 14.

Exercice 4
Carrément carré

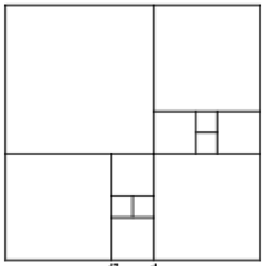
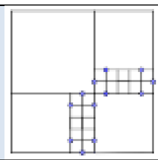


fig. 1

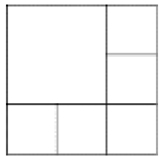
On souhaite recouvrir un sol carré avec des dalles de forme carrée exclusivement. Ces carrés peuvent avoir des dimensions différentes. Les dalles ne se chevauchent pas et sont parfaitement juxtaposées (les traits n'ont pas d'épaisseur).
On donne ci-contre (figure 1) un exemple d'un tel dallage constitué de 12 carrés.

1. **a.** En partant de la figure 1, proposer un dallage constitué de 24 carrés, sans agrandir la surface.
b. Construire un dallage constitué de 6 carrés, puis de 7 carrés.
c. Montrer qu'un dallage constitué de 2 carrés est impossible puis montrer qu'il en va de même pour un dallage constitué de 3 carrés.
d. Montrer que pour tout entier naturel n, on peut réaliser un dallage constitué de $1 + 3n$ carrés.

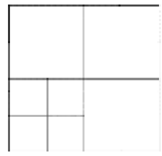
1. a. La figure ci-contre à gauche montre 24 carrés (quand on « coupe en 4 » un carré, on ajoute 3 carrés).



b. La figure de droite montre un dallage comportant 6 carrés. La figure ci-dessous à droite montre un dallage comportant 7 carrés.



c. Deux carrés auraient un côté commun ou le support d'un côté en commun. Dans les deux cas, la figure formée par l'ensemble n'est pas un carré (rectangle de longueur égale à deux fois la largeur ou polygone non convexe). Trois carrés formeraient aussi un rectangle non carré ou un polygone non convexe.



d. Comme dit plus haut, « couper un carré en quatre carrés » revient à ajouter 3 carrés. Si on peut réaliser un dallage de $1 + 3n$ carrés, on peut par ce procédé ajouter 3 carrés et obtenir $1 + 3n + 3 = 1 + 3(n + 1)$ carrés et ainsi de proche en proche à partir de 1.

2. Le dallage de la figure 2 est constitué d'un carré central et de carrés tous identiques sur les côtés.
a. Proposer un dallage du même type constitué de 25 carrés.
b. S'il y a n carrés sur chaque côté, combien y a-t-il de dalles carrées au total ?

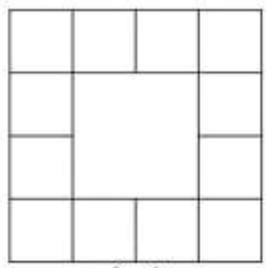
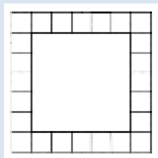


fig. 2

2.a. Dans le cas de la figure 2, le dallage est constitué de 4 petits carrés sur le côté, ce qui donne 12 petits carrés et 1 grand, soit au total 13 carrés.
Pour 5 petits carrés sur chaque côté, on aura au total $5 + 5 + 3 + 3 + 1 = 17$ carrés.
Pour 6 petits carrés sur chaque côté, on aura au total $6 + 6 + 4 + 4 + 1 = 21$ carrés.
Pour 7 petits carrés sur chaque côté, on aura au total $7 + 7 + 5 + 5 + 1 = 25$ carrés.



b. Plus généralement, s'il y a n carrés sur un côté, il y en a $(n - 1)$ sur les côtés adjacents et $(n - 2)$ sur le côté opposé : au total $1 + n + 2 \times (n - 1) + (n - 2) = 4n - 3$ carrés (en n'oubliant pas le carré central).